

# 順圧不安定からの擾乱発達に対する 2つの上限値の同一性について (GFD セミナー 2013 補足資料)

石岡圭一

2013年8月22日

## 概要

ある過去の研究において、順圧不安定からの擾乱発達に対して2つの上限値計算手法が提案され、数値計算の結果、それら2つが同一の値を与えるのではないかという予想がなされていた。本論文では、この予想に対する肯定的解決、すなわち、この同一性に対する証明を与える。さらに、この証明の過程で導入される手法は、上限値に対するより効率的な計算法も与えるものである。

## 1 はじめに

基本場の不安定によって擾乱が発達する際、その発達は無限には続かず、何らかの発達の上限が存在する。Shepherd (1988a) は、順圧不安定からの擾乱発達に関して、擬運動量密度の保存を応用することによって、完全に非線形な rigorous な上限値を求める手法を提案した。ただし、その上限値は、考慮されている保存則の束縛のもとでもっとも tight なものというわけではなかった。そこで、Ishioka and Yoden (1996) は、Shepherd (1988a) の手法を改良してより tight な上限値を求める手法を提案し、さらに、考慮されている保存則の束縛のもとで得られる最も tight な上限値を求める新しい手法も同時に提案した。これら2つの手法をいくつかの基本場に対して適用したところ、全ての場合について、これら2つの上限値は、相対誤差 1% 程度の範囲でほぼ一致することが示された。このことは、改良された上限値が、考慮されている保存則の束縛のもとでの最も tight な上限値を与えるということを示唆するものであった。ただ、これら2つの上限値が一致するという点についての数学的証明はこれまで得られていなかった。

本論文では、この同一性についての証明を与えると同時に、上限値を求めるためのより効率的な計算法の提案を行う。本論文の残りは以下のような構成になっている。第2節で、基本的な問題設定について述べ、第3節で、Ishioka and Yoden (1996) で提案された2つの上限値計算手法について紹介する。第4節で、この2つの上限値の同一性の証明を与えると同時に、新たな計算法も提示する。第5節では第4節で導入された計算法を用いた計算例を示す。第6節でまとめと議論を行う。

## 2 問題設定

以下の渦度方程式で支配される回転球面上の2次元非圧縮非粘性流体の運動を考える(球半径と球自転角速度とで無次元化してある).

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0. \quad (1)$$

ここに,  $q \equiv \nabla^2 \psi + 2\mu$  は絶対渦度,  $\psi(\lambda, \mu, t)$  は流線関数,  $t$  は時刻,  $\lambda$  は経度,  $\mu$  はサイン緯度, であり,  $\nabla^2$  は球面上の2次元ラプラシアンで以下のように定義される.

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}.$$

渦度方程式(1)に従う運動では,  $q$  は流れに沿って保存される. また, 運動は2次元非圧縮であるから,  $f(q)$  を  $q$  の任意関数としたとき,

$$C_f = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(q) d\mu d\lambda$$

は保存量となる. 関数  $f$  として,  $f(q) = \frac{1}{2}q^2$  をとった場合の  $C_f$  が全エンストロフィー  $F$  である.

また, その他の保存量として, 全角運動量  $D$  と全エネルギー  $E$  があり, それぞれ以下のように表せる.

$$D = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu q d\mu d\lambda, \quad E = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \psi \nabla^2 \psi d\mu d\lambda.$$

ただし,  $E$  の保存については本論文では特に用いない.

さて, 絶対渦度場を以下の初期条件

$$q = q_{\text{initial}}(\mu) + (\text{無限小擾乱})$$

からの時間発展を考える. ここで,  $q_{\text{initial}}(\mu)$  は  $\mu$  に対して単調でない(順圧不安定を起こしうる)分布とする. このとき,  $q = \bar{q} + \tilde{q}$  と分解し, エンストロフィー  $F$  を以下のように帯状成分  $F_z$  と波成分  $F_w$  とに分ける.

$$F_z = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\bar{q})^2 d\mu d\lambda, \quad F_w = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\tilde{q})^2 d\mu d\lambda; \quad F = F_z + F_w.$$

ここに,  $\overline{(\quad)}$  は帯状平均を表し,

$$\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q d\lambda,$$

である. 以上の設定において, 任意の  $C_f$  の保存と  $D$  の保存を拘束条件としたときに,  $F_w$  が到達しうる上限値を求めること(または, これと同値であるが,  $F_z$  の到達しうる下限値を求めること)を考える. 次節では, この上限値の計算について, Ishioka and Yoden (1996) で導入された2つの手法を紹介する.

### 3 2つの上限値についての概説

#### 3.1 The direct bound

任意の  $C_f$  の保存を満すためには、与えられた初期の絶対渦度分布から、絶対渦度を保った状態での気塊の再配置を考えればよい。今、エンストロフィーの帯状成分  $F_z$  の最小化を考えているので、全球を緯度円で区切ることによって、 $M$  個の等面積の帯状領域に離散化して扱うことにする。帯状領域に南から順に番号を付けていき、 $j$  番目の帯状領域は、 $\mu$  座標において、 $-1 + (j-1)\Delta\mu \leq \mu \leq -1 + j\Delta\mu$  の範囲を占めるとする ( $j = 1, 2, \dots, M$ )。ここに、 $\Delta\mu = 2/M$  である。以下、全球の面積を 1 として規格化することにすれば、各帯状領域の面積はそれぞれ  $1/M$  となる。Ishioka and Yoden (1996) では、等面積ではない帯状領域への分割をしていたが、本論文では、次節で述べる証明の段階での便宜上、等面積の分割とする。また、

$$\mu_j = -1 + (j-1/2)\Delta\mu \quad (j = 1, 2, \dots, M),$$

を導入し、これを  $j$  番目の帯状領域の  $\mu$  座標値を代表するものとして扱う。

初期に  $i$  番目の帯状領域にあった気塊のうち、 $j$  番目の帯状領域に移動したものの面積を  $r_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, M$ ) と表記することにすれば、気塊の再配置はこの行列 ( $r_{ij}$ ) によって記述できる。移動量が負になりえないことと、各帯状領域の面積が  $1/M$  であることにより、( $r_{ij}$ ) に対する拘束条件は、以下ようになる。

$$r_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M r_{ij} = 1/M \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^M r_{ij} = 1/M \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (4)$$

この拘束条件 (2)–(4) を満す ( $r_{ij}$ ) で記述される帯状領域間の気塊の再配置を以下では「気塊交換」と呼ぶことにする。

初期に  $i$  番目の帯状領域にあった気塊がもつ絶対渦度を  $q_i = \bar{q}_{\text{initial}}(\mu_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) と表すことにすれば、この離散化された系における  $C_f$  は

$$C_f = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M f(q_i) r_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(q_i) \quad (5)$$

と表され、これは気塊交換を表す ( $r_{ij}$ ) に依存しないので保存量になる (式変形において拘束条件 (4) を用いている)。この  $f(q)$  として、 $f(q) = \frac{1}{2}q^2$  をとった場合の  $C_f$  がこの離散化された系での全エンストロフィー  $F$  であり、以下のように表せる。

$$F = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{2}(q_i)^2. \quad (6)$$

さて、 $j$  番目の帯状領域における絶対渦度の平均  $\bar{q}_j$ ,

$$\bar{q}_j = M \sum_{i=1}^M q_i r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (7)$$

を用いると、全角運動量  $D$  および帯状成分エンストロフィー  $F_z$  は以下のように表せる。

$$D = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j \bar{q}_j, \quad (8)$$

$$F_z = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} (\bar{q}_j)^2. \quad (9)$$

また、波成分エンストロフィー  $F_w$  は、

$$F_w = F - F_z = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} q_i^2 r_{ij} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} (\bar{q}_j)^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} (q_i - \bar{q}_j)^2 r_{ij}, \quad (10)$$

と表せる。

気塊交換を記述する  $(r_{ij})$  に関する拘束条件 (2)–(4) と、 $D$  の保存の拘束のもとで、 $F_z$  を最小化することを考える。ここで、気塊交換前の初期状態に対する  $D$  ( $D_{\text{initial}}$  と書くことにする) は、

$$D_{\text{initial}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j q_j$$

と書けるので、 $D$  の保存は、

$$D = D_{\text{initial}} \quad (11)$$

と表せる。以上、 $(r_{ij})$  に関する拘束条件 (2)–(4) と、 $D$  に関する拘束条件 (11) (これも式 (7) および (8) を通じて  $(r_{ij})$  に関する拘束条件として扱える) のもとで、 $F_z$  を最小化することによって、(10) で定義される  $F_w$  の到達しうる上限値を求める手続きを考えることができる。これは、数理工学における凸 2 次計画問題と呼ばれる問題となる。この凸 2 次計画問題を解いて得られる  $F_w$  の上限値を Ishioka and Yoden (1996) では「直接上限値」と呼んだ。なお、Ishioka and Yoden (1996) では、この凸 2 次計画問題を凸シンプレックス法を用いて数値計算した。

### 3.2 The revised Shepherd's bound

次に、Ishioka and Yoden (1996) で導入された「the revised Shepherd's bound」について解説する。ここでも、次節での証明での便宜のため、前小節の離散化を用いた形で述べる。

まず、 $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) の最小・最大値をそれぞれ  $q_{\min}$  および  $q_{\max}$  とするとき、 $Y(\eta)$  を  $q_{\min} \leq \eta \leq q_{\max}$  で定義された、 $\eta$  に関する狭義単調増大な区分的に微分可能な関数とする (不連続であってもよい)。また、ここでは  $D_{\text{initial}} > 0$  な初期分布を考えて単調増大な  $Y(\eta)$  としているが、 $D_{\text{initial}} < 0$  なら単調減少な  $Y(\eta)$  を考えれば良い。また、その逆関数を  $Q(\mu)$  とする。ただし、 $Y(\eta)$  の任意の不連続点  $\eta_d$  において、 $Y(\eta)$  が  $Y_{d1}$  から  $Y_{d2}$  にジャンプするとき、この区間での  $Q(\mu)$  は、 $Q(\mu) = \eta_d$  ( $Y_{d1} \leq \mu \leq Y_{d2}$ ) と定義する。また、 $Y(q_{\min}) > \mu_1$  の場合には、 $Q(\mu) = q_{\min}$  ( $\mu \leq Y(q_{\min})$ ) とし、 $Y(q_{\max}) < \mu_M$  の場合には、 $Q(\mu) = q_{\max}$  ( $\mu \geq Y(q_{\max})$ ) と定義することによって、 $Q(\mu)$  の定義域に  $[\mu_1, \mu_M]$  が含まれるようにしておく。

この  $Y(\eta)$  および  $Q(\mu)$  を用いて、関数

$$A_Q(\mu, q) = - \int_{Q(\mu)}^q \{Y(\eta) - \mu\} d\eta$$

を定義する (定義域は,  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_M$ ,  $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$ ). この関数は,  $Q(\mu)$  を基本場としたときの擾乱  $q - Q$  に対する擬運動量密度に対応する. 今,  $Y(\eta)$  が狭義単調増大なので,  $A_Q(\mu, q) \leq 0$  である. この関数と, 気塊交換を記述する  $(r_{ij})$  を用いて, 以下のような総和を考える.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, q_i) r_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \left( - \int_{Q(\mu_j)}^{q_i} \{Y(\eta) - \mu_j\} d\eta \right) r_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \left( - \int_{Q(\mu_j)}^{q_i} Y(\eta) d\eta + \mu_j (q_i - Q(\mu_j)) \right) r_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \left( - \int_{q_c}^{q_i} Y(\eta) d\eta + \int_{q_c}^{Q(\mu_j)} Y(\eta) d\eta + \mu_j (q_i - Q(\mu_j)) \right) r_{ij} \\ &= - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{q_c}^{q_i} Y(\eta) d\eta + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{q_c}^{Q(\mu_j)} Y(\eta) d\eta + D - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j Q(\mu_j). \quad (12) \end{aligned}$$

この式変形において,  $(r_{ij})$  に関する拘束条件 (3) および (4) を用いている. また,  $q_c$  は,  $q_{\min} \leq q_c \leq q_{\max}$  を満たす任意の定数である. 式 (12) の最右辺において, 気塊交換を記述する  $(r_{ij})$  に依存しているのは,

$$D = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j \bar{q}_j = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \mu_j q_i r_{ij}$$

のみであるから,  $\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, q_i) r_{ij}$  は,  $D$  を保存する任意の気塊交換について不変量になる.

気塊交換前の初期条件においては,

$$r_{ij} = \frac{1}{M} \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M)$$

であるから (ここに,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである),  $D$  を保存する任意の気塊交換について, この不変量の値は,

$$\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, q_i) r_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, q_j)$$

である. また,  $\bar{q}$  と  $\check{q}$  を  $\bar{q} \in [q_{\min}, q_{\max}]$  かつ  $\bar{q} + \check{q} \in [q_{\min}, q_{\max}]$  を満たす任意の実数とすると, 平均値の定理より,

$$-A_Q(\mu, \bar{q} + \check{q}) = \int_{Q(\mu)}^{\bar{q} + \check{q}} \{Y(\eta) - \mu\} d\eta \geq \int_{Q(\mu)}^{\bar{q}} \{Y(\eta) - \mu\} d\eta + \{Y(\bar{q}) - \mu\} \check{q} + \frac{1}{2} (\check{q})^2 Y'_{\min} \quad (13)$$

が成立する。ここに、 $Y'_{\min}$  は、 $Y(\eta)$  の定義域内での (微分可能な区間における)  $dY/d\eta$  の最小値である。ここで、不等式 (13) は、 $Y(\eta)$  に不連続点があっても成立することに注意されたい。この不等式を用いると、

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, q_i) r_{ij} \\
= & - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, \bar{q}_j + (q_i - \bar{q}_j)) r_{ij} \\
\geq & - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M A_Q(\mu_j, \bar{q}_j) r_{ij} - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M (Y(\bar{q}_j) - \mu_j)(q_i - \bar{q}_j) r_{ij} + Y'_{\min} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} (q_i - \bar{q}_j)^2 r_{ij} \\
= & - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, \bar{q}_j) + Y'_{\min} F_w, \tag{14}
\end{aligned}$$

が得られる。最左辺は不変量だから、この不等式から、

$$- \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, \bar{q}_j) + Y'_{\min} F_w \leq - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, q_j),$$

が得られる。さらに、

$$- \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, \bar{q}_j) \geq 0$$

であることに注意すれば、

$$F_w \leq - \frac{1}{Y'_{\min}} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_Q(\mu_j, q_j), \tag{15}$$

を得る。この式の右辺が最小になるように関数  $Y(\eta)$  の変分問題を解いて得られる値が、Ishioka and Yoden (1996) における、「the revised Shepherd's bound」である。Ishioka and Yoden (1996) では、 $Y(\eta)$  を折線状の関数に離散化し、準ニュートン法を使ってこの変分問題を数値計算した。

## 4 2つの上限値の同一性の証明

本節では、前節で紹介された2つの上限値、the direct bound と the revised Shepherd's bound、が同一の値を与えることを証明する。前節の the revised Shepherd's bound の導入の部分と同様に、証明の便宜のため、 $D_{\text{initial}} > 0$  なる初期分布を扱うことにする ( $D_{\text{initial}} < 0$  なる初期分布については、以下にでてくる「増大」を「減少」に置き換えればよいだけである)。具体的には、上記の2つの上限値に対応する絶対渦度分布を構成する手順を与えることによって証明を行う。

#### 4.1 準備

まず, 初期分布  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) を添字  $i$  に対して (広義) 単調増大になるように気塊交換によってソートする. すなわち, このソートに対応する気塊交換を

$$r_{ij}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M)$$

と書くことにすると,  $i$  番目の帯状領域の気塊全てがこのソートによって  $k_i$  番目の帯状領域に再配置されるとして,

$$r_{ij}^{(0)} = \frac{1}{M} \delta_{jk_i} \quad (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M)$$

と表せる. この気塊交換によって実現する分布を

$$\bar{q}_j^{(0)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M q_i r_{ij}^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

と書くことにすれば, ソートしているので, 当然,

$$\bar{q}_1^{(0)} \leq \bar{q}_2^{(0)} \leq \dots \leq \bar{q}_M^{(0)}$$

が成立している. この分布に対応する全角運動量を

$$D^{(0)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j \bar{q}_j^{(0)},$$

と書くことにすれば, この分布は初期絶対渦度分布の並べ替えによって実現しうる  $D$  の最大値を与えることは明らかだから,  $D^{(0)} \geq D_{\text{initial}}$  である.

さて, 以下の手順を考える.  $D$  の保存は課さずに,  $(r_{ij})$  に関する拘束条件のみを満しながら, 気塊交換により  $\bar{q}_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) の分布を変形していく. 以下,  $\bar{q}_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を  $M$  次元ベクトルとして,  $\bar{q}^{(0)}$  と書くことにする.

与えられた  $\bar{q}^{(0)}$  に対して,  $M$  個の点:  $(\mu_j, \bar{q}_j^{(0)})$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) をつないで折線グラフで表した場合, 折線の各セグメント (segment) の傾きは

$$\frac{\bar{q}_{j+1}^{(0)} - \bar{q}_j^{(0)}}{\Delta\mu} \quad (j = 1, 2, \dots, M-1)$$

と定義されるが, その最大値 (それを  $\beta^{(0)}$  と書くことにする) を与えるセグメント, またはそれが複数連続している場合はそれをまとめたものを「最大勾配区間 (the interval of maximum gradient)」と呼ぶことにする. 最大勾配区間が複数ある場合もありうる (その場合は, 最大勾配区間の定義により, 複数の最大勾配区間がより勾配の小さい 1 つまたは複数のセグメントで分離されていなければならない). なお, 最大勾配区間それぞれについて, それを 1 つの線分としてみたときの中点をその最大勾配区間の中心点と呼ぶことにする (図 1 参照).

次に以下の 3 つの傾きを求める.

(i) 最大勾配区間の次に傾きが大きいセグメントの傾き.

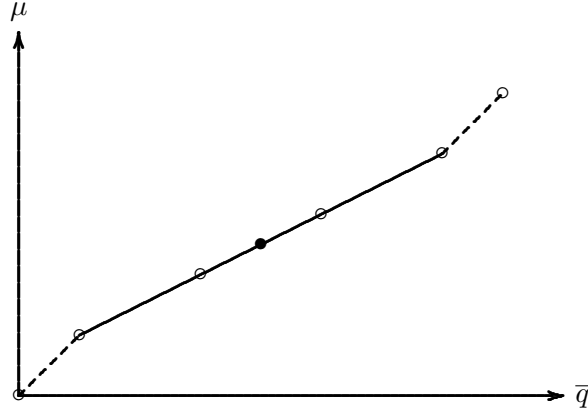


図 1: 最大勾配区間およびその中心点の定義の概念図. 白丸は  $(\mu_j, \bar{q}_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を表すノードである. この例の場合, 実線で結ばれている部分が最大勾配区間になり, 3 セグメントから成っている. 最大勾配区間の中心点は黒丸で示された点になる.

- (ii) 2つの最大勾配区間がセグメントを1つだけ狭んでいる場合, その2つの最大勾配区間の中心点同士を結んだ直線の傾き. または, そのような条件を満す最大勾配区間の組が複数ある場合には, それらの中心点同士を結んだ直線の傾きの最大値 (図 2 参照).
- (iii) 最大勾配区間の中心点と, その最大勾配区間に隣接するセグメントの最大勾配区間と反対側の端点とを結ぶ直線の傾きの最大値 (図 3 参照).

以上の (i)–(iii) で与えられる3つの傾きのうち, 一番大きいものを  $\beta^{(1)}$  とする. 与えられた  $\bar{q}^{(0)}$  分布のすべての最大勾配区間において, 中心点を不動にしたまま, 勾配を  $\beta^{(1)}$  にした新たな分布を作る (図 4 参照). この新たに実現された分布を  $\bar{q}^{(1)}$  とすると,  $\beta^{(1)}$  の設定から,  $\bar{q}^{(1)}$  の最大勾配区間での傾きは  $\beta^{(1)}$  となる. また, この分布は, 元の  $\bar{q}^{(0)}$  分布から気塊交換で実現できる. このことは次のように示せる.  $\bar{q}^{(0)}$  分布の最大勾配区間 (の任意の1つ) において,

$$\bar{q}_{k+m}^{(0)} = \bar{q}_k^{(0)} + m\beta\Delta\mu \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

と表せたとする. ここに,  $n$  はその最大勾配区間を構成するセグメントの個数で,  $k$  は最大勾配区間の南端のノード番号である. このとき, ノード番号  $(k+m)$  とノード番号  $(k+n-m)$  の気塊を帯状領域の面積に対して  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) の割合で交換したとする. 具体的には, 交換後の  $(r_{ij})$  を  $(r_{ij}^{(1)})$  と書けば,

$$r_{i(k+m)}^{(1)} = (1 - \alpha)r_{i(k+m)}^{(0)} + \alpha r_{i(k+n-m)}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, M; m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

とする. このとき新たに実現される分布は,

$$\begin{aligned} \bar{q}_{k+m}^{(1)} &= (1 - \alpha)\bar{q}_{k+m}^{(0)} + \alpha\bar{q}_{k+n-m}^{(0)} \\ &= (1 - \alpha)(\bar{q}_k^{(0)} + m\beta\Delta\mu) + \alpha(\bar{q}_k^{(0)} + (n - m)\beta\Delta\mu) \\ &= \bar{q}_k^{(0)} + m(1 - 2\alpha)\beta\Delta\mu + n\alpha\beta\Delta\mu \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$



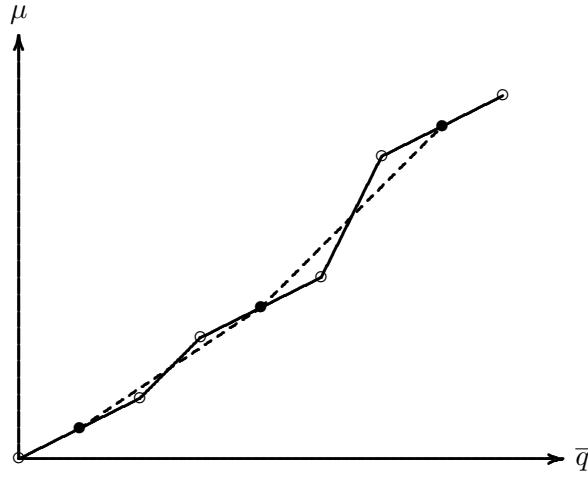


図 2: パターン (ii) の概念図. この例の場合, 実線で表されている分布において, 最大勾配区間が 3 つあり, パターン (ii) の条件を満たす組が 2 つとれる. 中心点同士を結ぶ線分 (破線で表示) の傾きは下側の組に対応するものの方が大きいので, こちらの傾きが選択されることになる.

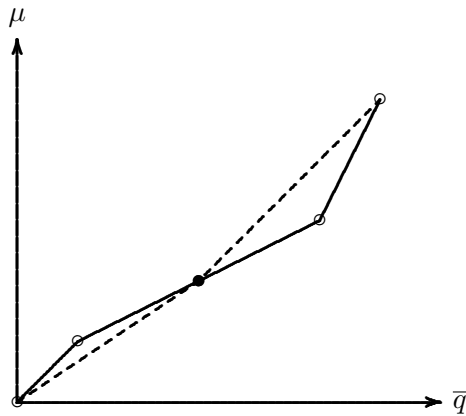


図 3: パターン (iii) の概念図. この例の場合, 実線で表されている分布において, 黒丸で表示された中心点をもつ最大勾配区間 (この例の場合は中心点が 1 つのノードと一致している) が 1 つある. それに隣接しているセグメントは 2 つあり, それらの最大勾配区間と反対側の端点と中心点を結ぶ直線は 2 つ引ける (点線で表示). この 2 つのうち, 傾きが大きいのは下側のものであるので, こちらの傾きが選択されることになる.

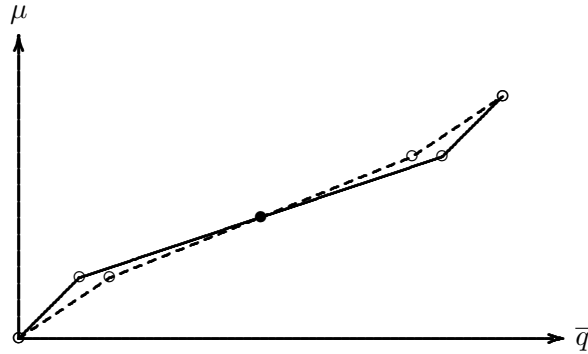


図 4: 分布の更新の概念図. この例の場合, 実線で表示された元の分布において, 黒丸で表示された中心点をもつ最大勾配区間の傾きを, 与えられた傾きに変える (この際, 中心点は動かさない). これに伴って, 最大勾配区間の内部および両端のノードが移動し, 新たな分布 (点線で表示) が実現する.

となる. 従って,  $\alpha = (1 - \beta^{(1)}/\beta^{(0)})/2$  と定めれば, 新たに実現される分布の最大勾配区間の傾きを  $\beta^{(1)}$  にすることができる. ここで,  $0 \leq \beta^{(1)} < \beta^{(0)}$  なので,  $0 < \alpha \leq 1/2$  である. なお,  $n$  が偶数の場合,  $m = n/2$  に対応するノードが中心点になっているが, ここでは実際には気塊交換は行われていないことに注意されたい. なお, ここで示した気塊交換は  $\beta^{(1)}$  の傾きを実現するための一例に過ぎず, いくらでも他の気塊交換のやりかたが可能であることにも注意されたい.

以上により, 最大勾配区間の傾きが  $\beta^{(0)}$  である元の分布  $\bar{q}^{(0)}$  から, 最大勾配区間の傾きが  $\beta^{(1)} (< \beta^{(0)})$  である新たな分布  $\bar{q}^{(1)}$  が気塊交換によって得られたことになる. ここで, 気塊交換が行われているのは, 新たな分布の最大勾配区間に含まれる (端点も含む) ノードに対応する帯状領域だけであることにも注意されたい.

得られた  $\bar{q}^{(1)}$  に対して, 同様の操作を反復していけば,  $\bar{q}$  が次々更新されていき, 最大勾配区間の傾き  $\beta$  は (狭義) 単調に減少していく. これに伴い, 対応する全角運動量  $D$  も (狭義) 単調に減少していく. 最終的には, 全体が 1 つの最大勾配区間となった分布に有限回の操作で到達する (1 回の操作により, 最大勾配区間に含まれていない少なくとも 1 つのセグメントが最大勾配区間に取り込まれていくため). この有限回の操作回数を  $n$  とし, 得られた分布の列を順に  $\bar{q}^{(0)}, \bar{q}^{(1)}, \dots, \bar{q}^{(n)}$  と書く. また, 対応する最大勾配区間の傾きと全角運動量をそれぞれ,  $\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}; D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ , と表すことにする. 上に述べたように

$$\beta^{(0)} > \beta^{(1)} > \dots > \beta^{(n)} > 0; D^{(0)} > D^{(1)} > \dots > D^{(n)} > 0,$$

が成立する. さて, 全体が 1 つの最大勾配区間になっている  $\bar{q}^{(n)}$  に対して, 上に述べたのと同様の操作により, 気塊交換によって最大勾配区間の傾きが 0, すなわち, 一様な絶対温度分布を実現することができる. このときの分布を  $\bar{q}^{(n+1)}$  とし, 対応する最大勾配区間の傾きと全角運動量をそれぞれ,  $\beta^{(n+1)}, D^{(n+1)}$  と表すことにする. 定義により, もちろん,  $\beta^{(n+1)} = D^{(n+1)} = 0$  である.

さて, 次に, 全角運動量保存の条件  $D = D_{\text{initial}}$  を満たせることを考える. 仮定より,

$D^{(0)} > D_{\text{initial}} > 0 = D^{(n+1)}$  であるから、 $D^{(k)} \geq D_{\text{initial}} > D^{(k+1)}$  を満す  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  が選べるはずである。このとき、

$$\gamma D^{(k)} + (1 - \gamma) D^{(k+1)} = D_{\text{initial}}$$

を満す  $\gamma$  を求めると、

$$\gamma = \frac{D_{\text{initial}} - D^{(k+1)}}{D^{(k)} - D^{(k+1)}}$$

となる ( $0 < \gamma \leq 1$ )。このとき、

$$\bar{q}^* = \gamma \bar{q}^{(k)} + (1 - \gamma) \bar{q}^{(k+1)}$$

によって新たな分布  $\bar{q}^*$  を作ると、この分布に対する  $D$  は  $D_{\text{initial}}$  に等しくなる。また、 $\bar{q}^*$  の最大勾配区間に含まれるノード番号は  $\bar{q}^{(k)}$  のそれに等しく、また、最大勾配区間の傾きを  $\beta^*$  とすると、

$$\beta^* = \gamma \beta^{(k)} + (1 - \gamma) \beta^{(k+1)}$$

で与えられる。さらに、 $\bar{q}^*$  は、 $\bar{q}^{(k)}$  から、最大勾配区間 (端点を含む) 内のみでの気塊交換によって生成しうることにも注意されたい。

以上により、ソートを行った絶対渦度分布から、最大勾配区間 (端点を含む) 内のみでの気塊交換によって、全角運動量保存を満す絶対渦度分布  $\bar{q}^*$  が得られた。

## 4.2 証明

次に、上で求められた分布  $\bar{q}^*$  が、 $(r_{ij})$  に関する拘束条件と全角運動量  $D$  の保存のもとでの  $F_z$  の最小を与える分布であることを証明する。分布  $\bar{q}^*$  をもとに the revised Shepherd's bound を与える  $Q(\mu)$  を決定することを考える。まず、

$$\bar{q}^* = (\bar{q}_j^*)_{j=1,2,\dots,M}$$

に対して、 $Q(\mu)$  は基本的に  $(\mu_j, \bar{q}_j^*)$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を線分で繋いだ折線関数として定める。ただし、最大勾配区間の端点 (仮に、 $(\mu_k, \bar{q}_k^*)$  とする) の外側では、最大勾配区間の直線を  $\bar{q}_k^{(0)}$  の値のところまでそのまま外挿し、そこにノードを追加し、そのノードも含めて繋いだ折線とする (図 5 参照)。

さて、 $Q(\mu)$  を上記のように定めると、 $\bar{q}^*$  を与える  $(r_{ij})$  および対応する  $\bar{q}_j = \bar{q}_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) について、式 (14) で、まず、 $\bar{q}^{(0)}$  の分布からの気塊交換が最大勾配区間でしか行われていないため最大勾配区間に対応する  $\mu_j$  でのみ  $(q_i - \bar{q}_j) r_{ij} \neq 0$  であることと、最大勾配区間に含まれる絶対渦度  $q$  の値は  $Y(\eta)$  が傾き  $Y'_{\min} = 1/\beta^*$  の直線になっている  $\eta$  の区間に含まれることから ( $Q(\mu)$  を決定する際に図 5 のような最大勾配区間の端点での処理をしたのはこのため)、式 (14) において等号が成立する場合であることになる。さらに、この場合、 $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) において  $Q(\mu_j) = \bar{q}_j$  も満していることを考慮すると、結局、このように決めた  $Q(\mu)$  に対して、 $\bar{q}^*$  に対応する気塊交換  $(r_{ij})$  を考えると、式 (15) において等号が成立する場合になることが分かる。式 (15) は、 $F_w$  に対する上限を与える不等式であったので、等号が成立する場合が得られたということは、 $\bar{q}^*$  およびそれに対応

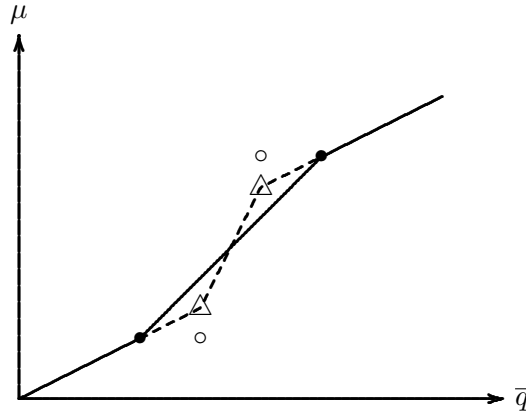


図 5:  $Q(\mu)$  の構成法の概念図. 最大勾配区間 (この場合, グラフの左下と右上にある) の端点 (黒丸で表示) に対して,  $\bar{q}^{(0)}$  の分布において同じ  $\mu$  座標でもっていた  $\bar{q}$  の値の点を白丸で表示している. 最大勾配区間から, この白丸の点での  $\bar{q}$  の値のところまで直線を外挿し, そこに新たなノード (三角形で表示) を追加し, その点も繋ぐことによって  $Q(\mu)$  分布を折線関数で構成する (点線で表示).

する ( $r_{ij}$ ) を与えた場合が, (全角運動量保存を満す) 気塊交換で到達しうる  $F_w$  の最大値を与えることと,  $Q(\mu)$  を上記のように定めたものが式 (15) の右辺の最小値を与えることとが同時に示されたことになる.

以上により, the revised Shepherd's bound と, the direct bound の同一性が証明され, さらに具体的にそれらに対応する  $Q(\mu)$  および  $\bar{q}^*$  を決定する手順が確立したことになる. また, 最大勾配区間の端点の外側で図 5 のような外挿がなされる分,  $\bar{q}^*$  に対応する  $(\mu_j, \bar{q}_j^*)$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を折線で繋いだものと,  $Q(\mu)$  の分布とは, 有限の  $M$  では若干異なるが,  $M$  が十分に大きい極限では両者の差はどんどん微小になっていくことになる.

## 5 数値計算例

前節で導入された  $\bar{q}^*$  を求める計算手順は, そのまま数値計算のためのアルゴリズムとして採用することができる. ただし, 傾きについて大小比較を行う部分があるので, その部分については数値計算の丸め誤差を考慮した比較を行わなければならない点には注意が必要である. 図 6 に数値計算して得られた分布の例を示す. ここで, 初期分布  $q_{\text{initial}}(\mu)$  は

$$q_{\text{initial}}(\mu) = 2\mu + aP_3(\mu) = 2\mu + a\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$

として与えた. ここに,  $P_3(\mu)$  は 3 次の Legendre 多項式で, 係数  $a$  は,  $a = 2.4$  とした. なお, この数値計算では, 帯状領域への分割数  $M = 512$  としている.

初期の単調ではない分布  $q_{\text{initial}}(\mu)$  (点線) がまず単調にソートされ ( $\bar{q}^{(0)}$ : 破線), そこを出発点として前節で述べられた手順によって気塊交換が行われて, 最終的に  $F_w$  の上限値 (すなわち  $F_z$  の下限値) を与える分布 ( $\bar{q}^*$ : 実線) が得られる. この例の場合,  $\bar{q}^*$  分布において, 最大勾配区間が 2 箇所 ( $|\mu| > 0.3$ ) に形成されており, その間にはソートによって実現され

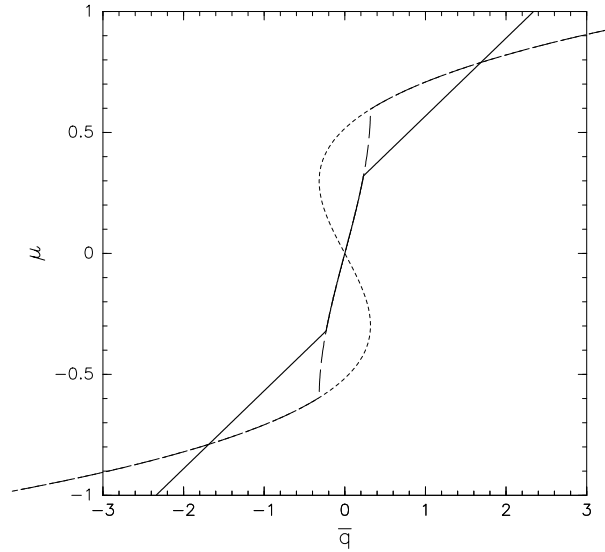


図 6: 上限値を与える  $\bar{q}^*$  分布の数値計算例. 点線: 初期分布  $q_{\text{initial}}(\mu)$ . 破線: ソートされた分布  $q^{(0)}$ . 実線: 上限値を与える  $\bar{q}^*$  分布. 点線と破線, および破線と実線が一部区間で重なっていることに注意.

た  $\bar{q}^{(0)}$  分布がそのまま残っている. この  $\bar{q}^*$  分布と  $\bar{q}^{(0)}$  分布とをナイーブに見比べてしまうと, 初期に絶対焔度分布が  $\mu$  に対する減少関数になっていた区間 ( $|\mu| < 0.3$ ) において,  $\bar{q}^*$  では単調増大な分布になっていて, そこで波成分があるように誤解してしまいそうになるが, 実際は, そこでは絶対焔度は帯状に一樣で, 波成分は 2 つの最大勾配区間 ( $|\mu| > 0.3$ ) でのみ有限の値を持っていることに注意が必要である.

## 6 まとめと議論

本論文では, 順圧不安定からの擾乱発達に対して Ishioka and Yoden (1996) で提案された 2 つの上限値, the direct bound と the revised Shepherd's bound が同一の値を与えること, および, それぞれに対応する  $\bar{q}^*$  分布と  $Q(\mu)$  分布が離散化を細かくしていった極限では一致することを証明した. ここでの証明は離散化された系に対するものであり, 連続系では  $\bar{q}^*$  分布に至る手順を数学的に精密化することに何らかの困難を伴う可能性もありうるが, 本論文で与えた証明において離散化を細かくしていった極限として扱うことで本質的には問題無いと考えられる. また, 証明の過程で導入された  $\bar{q}^*$  分布を求める手順は, 最適化手法を全く必要としない単純な反復アルゴリズムで, 必要な反復数も分割数  $M$  以下で済むため, 非常に軽い計算である. 扱う変数も, 気塊交換を記述する  $(r_{ij})$  を直接扱う必要がなく,  $\bar{q}$  のみを更新していけばよいので, 必要なメモリや計算量も少なくて済む. 本論文ではジオメトリとして球面を考えたが, スリップ境界条件の周期境界チャンネル型のジオメトリでも全く同様の扱いが可能である. また, 本論文では, 順圧不安定からの擾乱発達に対する上限値問題を扱ったが, 本論文で導入した手法は, 擬運動量密度の積分の保存則を

用いるその他の問題、例えば、Shepherd (1988b) で扱われた傾圧不安定の飽和の問題、等にも応用が可能かもしれない。

最後に、前々節で導入した手順で何故  $F_z$  の最小 (すなわち、 $F_w$  の最大) を与える分布に到達できるのかを考察してみよう。上記の手順では、 $(\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j)/\Delta\mu$  が大きな部分から気塊交換を順に行っていくわけだが、この理由は以下のように説明できる。2 箇所の帯状領域  $\mu_a < \mu_b$  において、帯状平均絶対渦度がそれぞれ  $\bar{q}_a < \bar{q}_b$  であったとする。この 2 箇所の帯状領域で気塊交換が行われて、 $\mu_a$  の帯状領域での平均絶対渦度が  $\bar{q}_a + \delta q$  に、 $\mu_b$  の帯状領域での平均絶対渦度が  $\bar{q}_b - \delta q$  に、それぞれなったとする ( $\delta q > 0$  とする)。この気塊交換による  $D$  の増分  $\delta D$  は、

$$\delta D = -\frac{1}{M}(\mu_b - \mu_a)\delta q < 0$$

である。また、帯状エンストロフィー  $F_z$  の増分  $\delta F_z$  は、

$$\begin{aligned}\delta F_z &= \frac{1}{2M} \left\{ (\bar{q}_a + \delta q)^2 + (\bar{q}_b - \delta q)^2 - \bar{q}_a^2 - \bar{q}_b^2 \right\} \\ &= \frac{1}{M} \left\{ -(\bar{q}_b - \bar{q}_a)\delta q + (\delta q)^2 \right\} \\ &\approx -\frac{1}{M}(\bar{q}_b - \bar{q}_a)\delta q < 0,\end{aligned}$$

となる。ここで、最後の変形では、 $\delta q$  が微小として 2 次項を無視する近似を行っている。以上から、

$$\frac{\delta F_z}{\delta D} \approx \frac{\bar{q}_b - \bar{q}_a}{\mu_b - \mu_a}$$

を得るが、右辺は 2 点  $(\mu_a, \bar{q}_a)$  と  $(\mu_b, \bar{q}_b)$  を結ぶ直線の傾きの勾配である。従って、気塊交換によって  $D$  を減少させていくとき、できるだけ  $F_z$  を減少させるためには、帯状平均絶対渦度の勾配が大きな区間から気塊交換をしていけば良いことになる。前々節で行った手順では、ソートによって初期絶対渦度分布の並べ替えによって実現しうる  $D$  が最大の状態をまず作成し、そこから出発して傾きの大きな区間から気塊交換をしていくことによって、与えられた初期絶対渦度分布と同じ  $D$  をもつ条件のもとで  $F_z$  の最小を与える分布に到達できたと解釈できる。

ここまで見てくると、 $q^*$  を求める手順は、いわゆる「焼きなまし」に類似していることに気がつく。焼きなましは、金属加工などにおいて、金属の温度を一旦上げてから徐々に冷却することによって、元の状態よりも自由エネルギーの小さな結晶状態を指す用語である。今の手順の場合、全角運動量  $D$  を温度、帯状成分エンストロフィー  $F_z$  を自由エネルギーと読み換えれば類似性は明らかであろう。この類似性からまた逆に想起されることであるが、 $\delta F_z/\delta D$  が局所的に最大となる経路に沿って状態を変化させていっても必ずしも  $F_z$  の真の最小に到達できる保証はない。従って、上で述べた解釈だけでは証明としては不十分で、この路線の証明を厳密化しようとするならば、変数  $(r_{ij})$  が拘束条件のもとで動く多次元空間内の領域における  $D$  と  $F_z$  の等値面の幾何学的構造を吟味する必要があるだろう。一方、本論文の 4 節で与えた証明では、一連の反復アルゴリズムによって  $F_z$  の真の最小値に到達できることを、the revised Shepherd's bound を利用することによって厳密に示していることに改めて注目されたい。

## 謝辞

京都大学数理解析研究所の山田道夫教授には有益なコメントをいただいた。この場をかりて感謝したい。図 6 の描画には地球流体電脳倶楽部ライブラリ DCL(<http://www.gfd-dennou.org/arch/dcl/>) を用いた。開発グループに感謝したい。

## 参考文献

- Ishioka, K. and S. Yoden, 1996: Numerical methods of estimating bounds on the nonlinear saturation of barotropic instability. *J. Meteor. Soc. Japan*, **74**, 167–174.
- Shepherd, T. G., 1988a: Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, **196**, 291–322.
- Shepherd, T. G., 1988b: Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part I: The two-layer model. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2015–2025.