

回転球殻対流

～天体内部流体運動の基礎として



京都大学数理解析研究所
竹広 真一

GFD セミナー2012年夏「天体内部の流体力学」

平成24年8月20日 @ 休暇村支笏湖

目次

- 観測される天体表面の流れ
 - 木星・土星・天王星・海王星・太陽（・地球中心核）
- 回転球殻対流問題の定式化
- 臨界対流
 - 1970～1980年代：理論摂動計算
 - 1980年代後半～：臨界対流の数値計算
- 対流による帯状流生成
 - 1970～1980年代：理論摂動計算
 - 1990年代～：弱非線形数値計算
- 有限振幅対流
 - 非線形時間発展数値計算

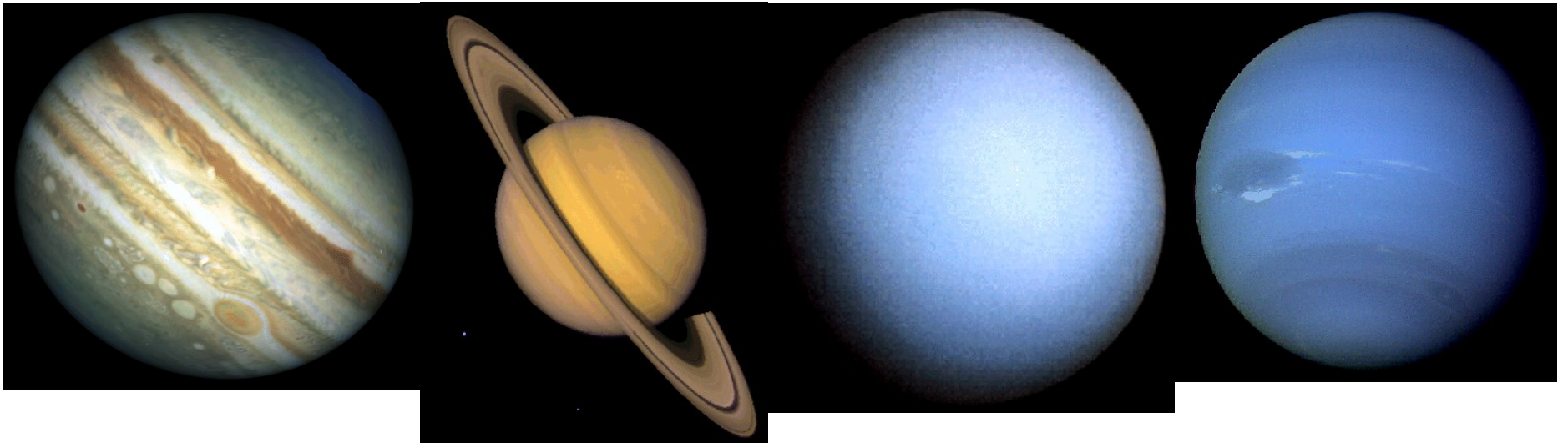
ガス惑星・氷惑星

木星

土星

天王星

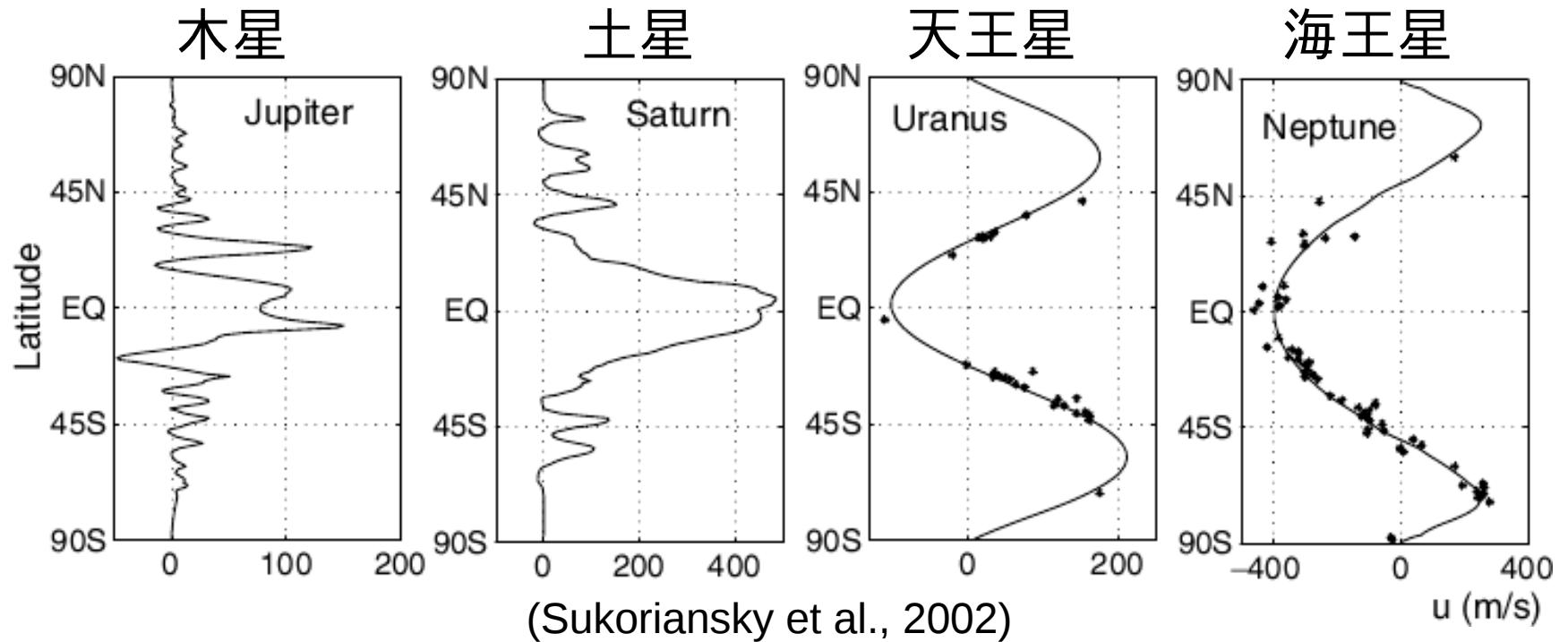
海王星



(Welcome to the planets/NASA)

- 特徴的な縞状パターン
- 地球より速い回転角速度

ガス・氷惑星の帯状流分布

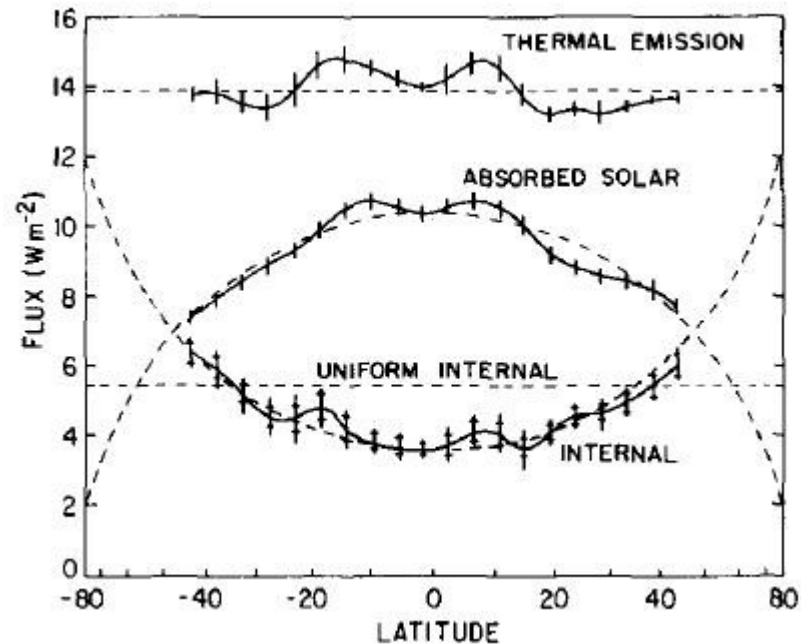


- 縞状パターンに対応して東西流互い違いに存在
 - 木星・土星：縞状パターン、赤道超回転
 - 天王星・海王星：縞なし、赤道亜回転
 - (太陽：縞なし、赤道超回転)

大規模流のエネルギー源

- 入射太陽放射 < 外向き熱放射
→ 内部熱源の存在 (天王星以外)

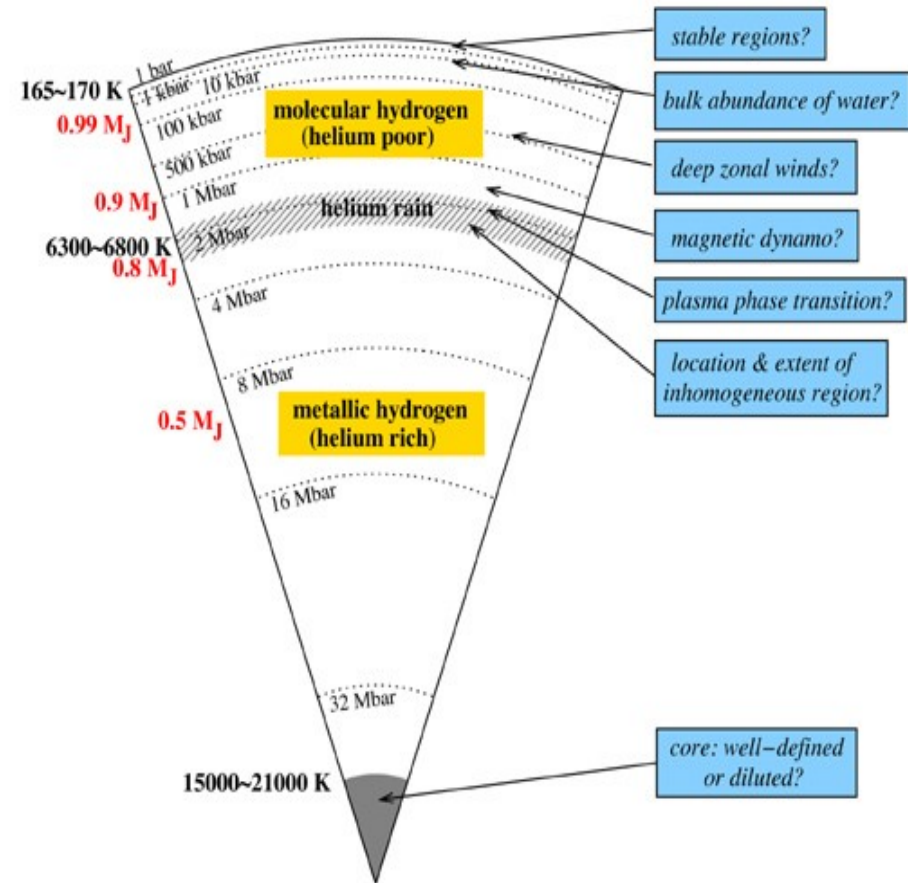
- エネルギー源
 - 入射太陽放射
 - 内部熱源



木星の放射エネルギー収支
(Pirraglia 1984)

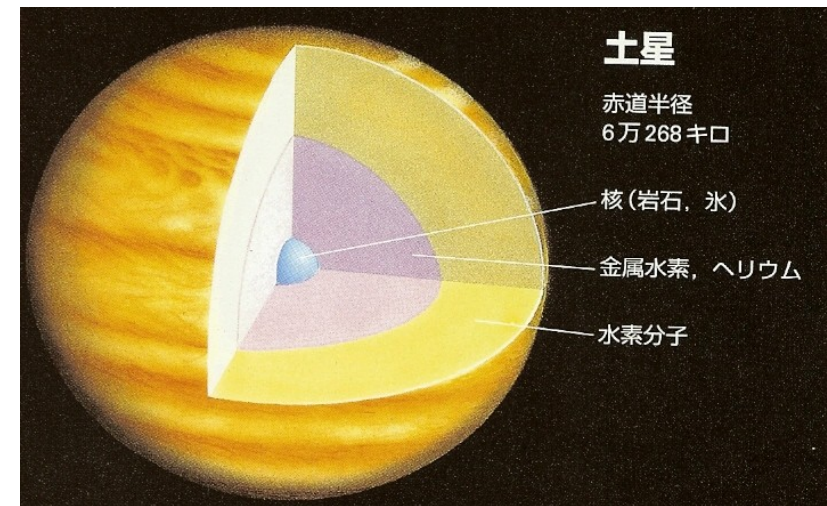
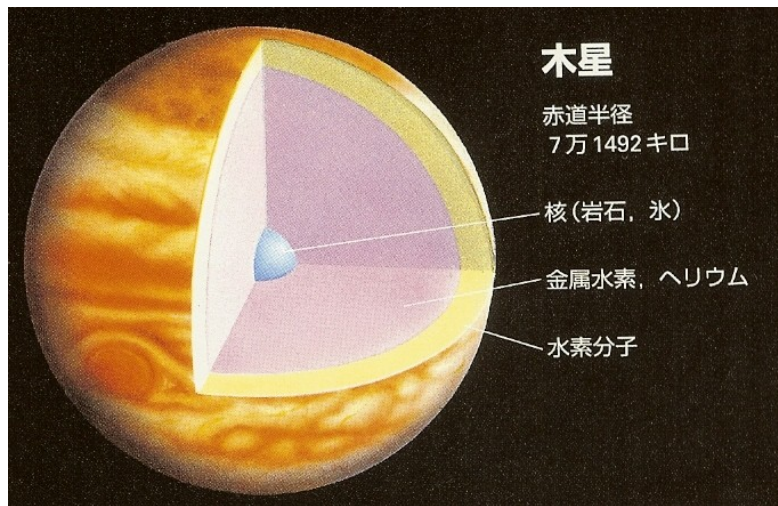
ガス・氷惑星大気の鉛直構造

- 表層の流体運動で説明 (浅いモデル)
 - 入射太陽放射
 - 内部熱源
 - 下層の対流運動
 - 表層の渦を励起
- 深部の対流運動に起源を求める (深いモデル)
 - 内部熱源 → 深部対流



木星の内部構造の模式図
(Guillot et al, 2004)

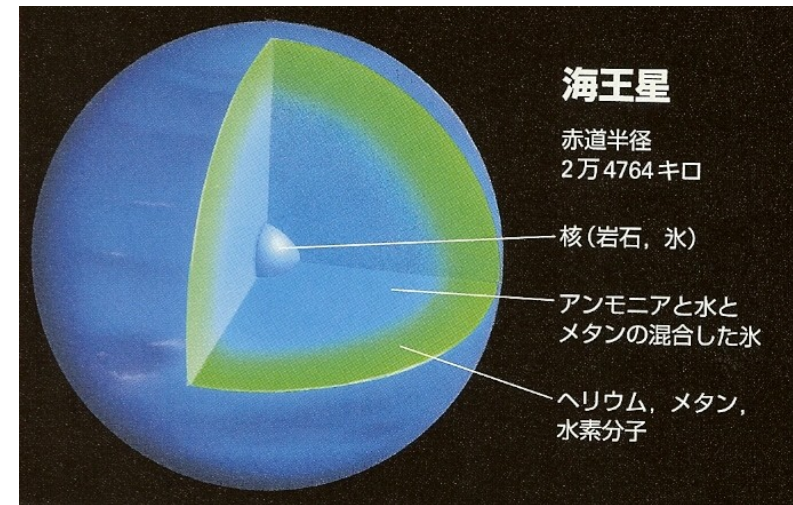
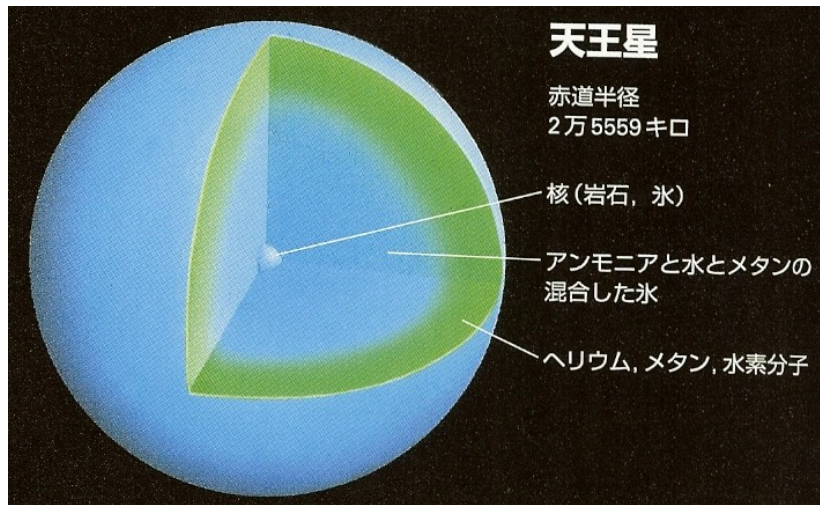
ガス惑星の内部構造



(Newton 別冊太陽系全カタログ, 2000)

- 大部分が気体と金属流体、中心部に小さな核
- 入射太陽放射 < 射出放射 ⇒ 内部に熱源
- 流れの原因：太陽放射 or 内部熱源

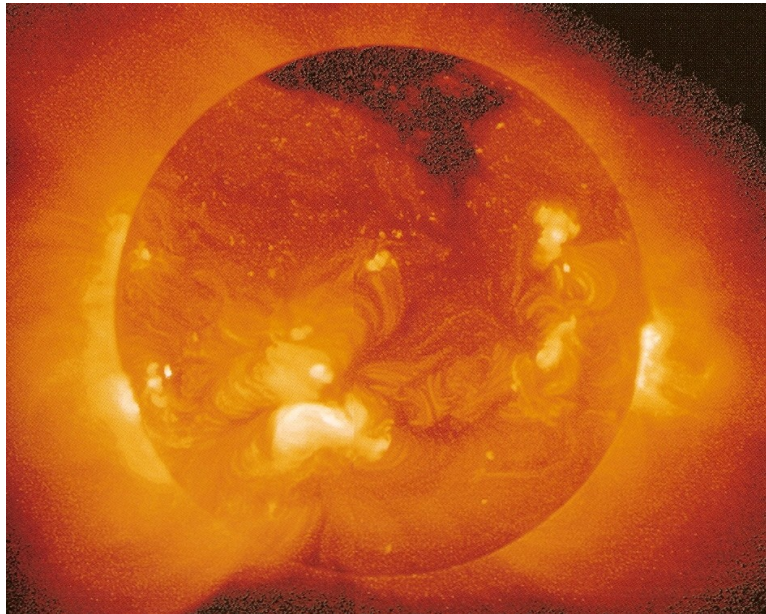
氷惑星の内部構造



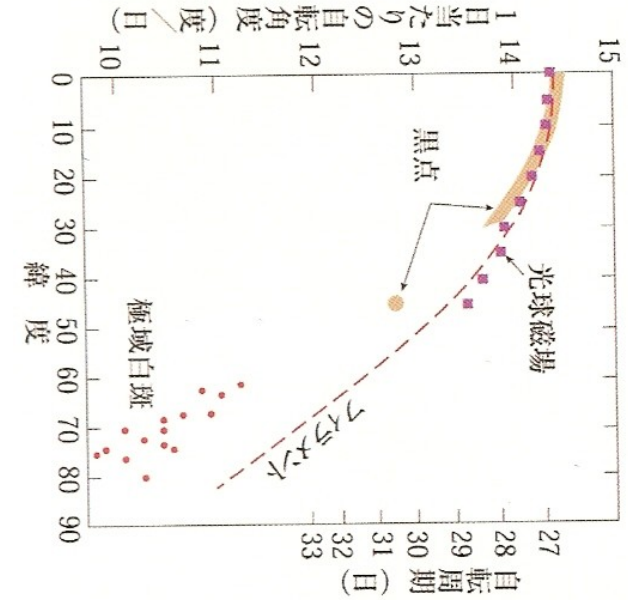
(Newton 別冊太陽系全カタログ, 2000)

- 外側に大気、内側に氷、中心に小さい岩石と氷
- 天王星：内部熱源なし ⇔ 海王星：内部熱源有

太陽



(柴田, 大山, 2004)



(柴田, 大山, 2004)

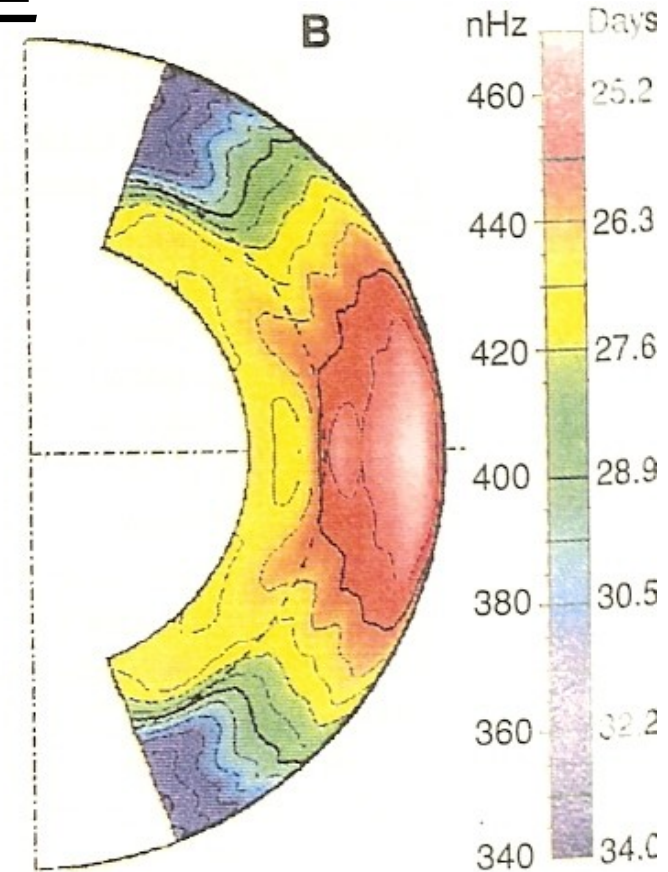
- 赤道で速い（差分回転、赤道加速問題）
- 自転周期約27日

太陽の内部構造



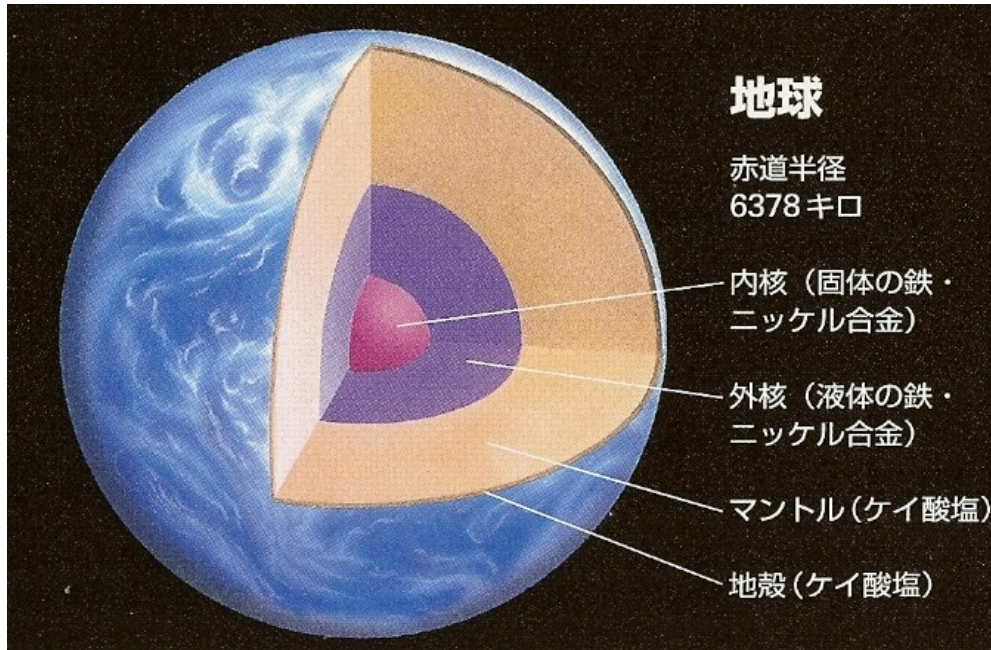
(Newton 別冊太陽系全カタログ, 2000)

- 外側3割の球殻領域で対流運動
- 流れのエネルギー源
内部の核融合 → 対流層を加熱

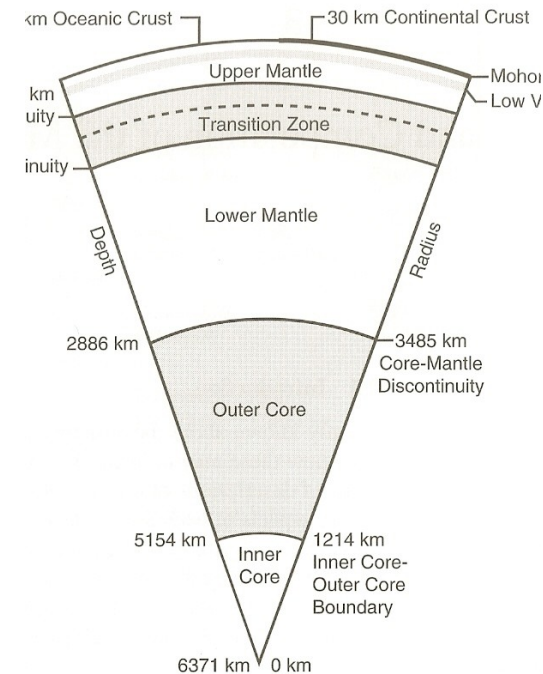


日震学により観測された
回転角速度分布
(Thompson et al., 1996)

地球(型惑星)の内部構造



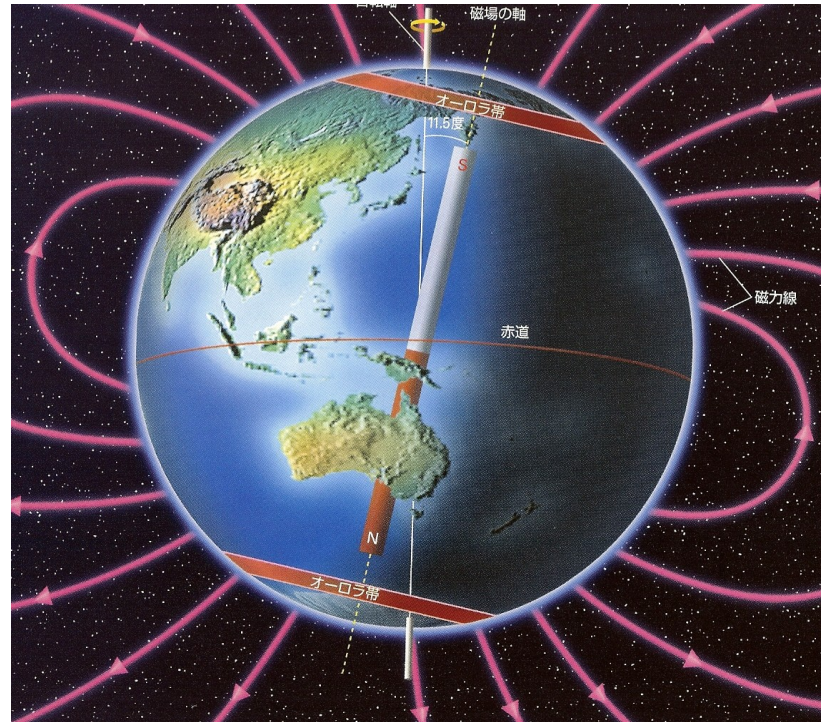
(Newton 別冊太陽系全カタログ, 2000)



(Schubert et al., 2001)

- 地震波速度の分析：1900年初めに層構造が知られた
 - マントル : 岩石、ゆっくりと流動している
 - 外核(流体核) : 融けた鉄 + α
 - 内核 : 固体鉄 + α

地球型惑星の流体核



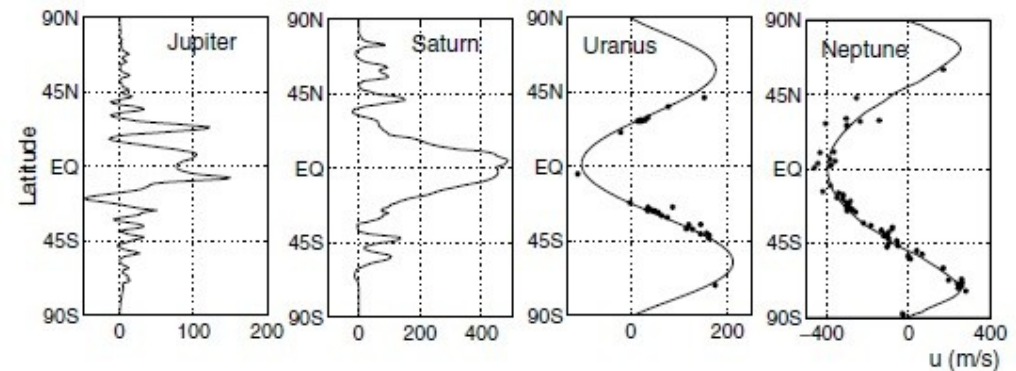
(Newton別冊地球のしくみと進化の歴史, 2004)

- 固有磁場の存在
 - 永久磁石では温度が高すぎ(キュリー温度約700度)
 - 内部に地震波の横波が通らない領域 ⇒ 流体領域
 - 融けた鉄の流体運動によるダイナモ作用

回転球殻内の熱対流問題

- 惑星・恒星内部の流れの共通の特徴を表現するモデル
 - 幾何学的相似：領域が球殻
 - 力学的状況の相似
 - 内部から熱せられる or 外側から冷やされる
 - 自転している
- パラメーターの差異 ⇒ 各惑星や太陽の流れの特徴をそれぞれ表現できるか？
 - 木星・土星：縞状パターン、赤道加速
 - 天王星・海王星：縞なし、赤道減速
 - 太陽：縞なし、赤道加速

(Sukoriansky et al., 2002)

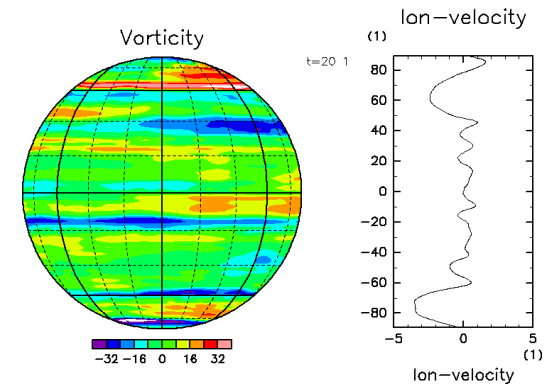


天体規模流れ場の(基礎)研究

- ~~浅いモデル：球面上の薄い大気の運動~~

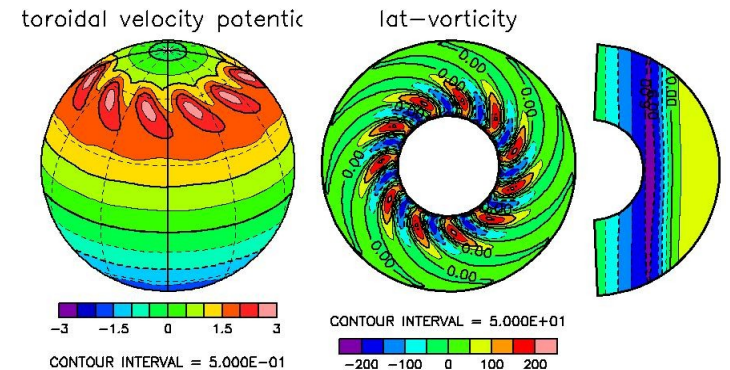
- ~~回転球面上の2次元乱流問題
(順圧モデル, 浅水モデル)~~

- ~~3次元惑星大気シミュレーション
(多層モデル)~~



- 深いモデル：回転球殻対流

実際の天体にこだわらない
系の性質を追求



回転球殻対流問題の定式化

回転球殻対流問題～支配方程式系

運動方程式(速度の時間変化)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \alpha g T \mathbf{r} + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

熱の式(温度の時間変化)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + Q$$

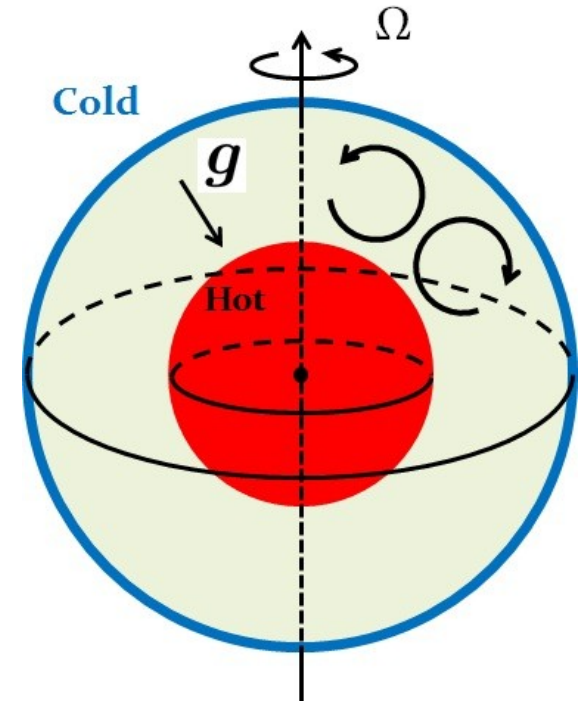
質量保存の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

t : 時間, \mathbf{v} : 速度, T : 温度, ρ : 密度, p : 圧力

$\boldsymbol{\Omega}$: 自転角速度, α : 熱膨張率, g : 重力加速度

ν : 粘性率, κ : 熱拡散率, Q : 内部熱源



支配方程式（無次元）

- 長さスケール $D = r_o - r_i$, 時間スケール D^2/ν
温度スケール $QD^2/3\kappa$ で無次元化

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{2}{E} \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{R}{Pr_o} T \mathbf{r} + \nabla^2 \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{P} \nabla^2 T + \frac{3}{P}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

\mathbf{k} : 回転軸方向の単位ベクトル

- 境界条件：温度固定（熱フラックス固定）
自由すべり / すべりなし

無次元数

- 独立なパラメーターは4つ

- 長さスケール：球殻の厚さ $D = r_o - r_i$

- 温度のスケール：上下の基本場の温度差 ΔT

(内部熱源で定まる温度傾度 $QD^2/3\kappa$)

- エクマン数：粘性 / コリオリ $E = \nu / \Omega D^2$

- レイリー数：浮力 / (粘性・拡散) $R = \alpha g_o \Delta T D^3 / \kappa \nu$

- プラントル数：粘性 / 拡散 $P = \nu / \kappa$

- 内外半径比 $\eta = r_i / r_o$

各惑星大気の無次元数

	太陽	木星・土星	天王星・海王星
エクマン数	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-15}$
レイリー数	$\sim 10^{20}$	$\sim 10^{33}$	$\sim 10^{29}$
プランドル数	$\sim 10^{-7}$	~ 0.1	~ 0.1
内外半径比	0.7	$\sim 0.8-1$	$\sim 0.8-1$

(Ossendrijver, 2003; Aurnou et al., 2007)

- 拡散パラメーター不明, それでも見積もってみると . . .
 - エクマン数小さい: 回転の効果大きい
 - レイリー数大きい: 対流が激しい
- 実際のパラメーターを用いた計算は不可能
- 現象の再現 (シミュレーション) ではなく、
数値実験 \Rightarrow 現象の理解をめざす

トロイダル・ポロイダル

- 速度場が非発散 \rightarrow トロイダル・ポロイダル表現

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r})$$

トロイダル

ポロイダル

\mathbf{r} : 球殻中心からの位置ベクトル

- 運動方程式に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$, $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \frac{2}{E} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \frac{2}{E} \hat{Q} \phi = \mathbf{r} \cdot \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}],$$

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \frac{2}{E} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \frac{2}{E} \hat{Q} \psi - \frac{R}{Pr_o} L_2 T = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}].$$

$$L_2 \equiv -r^2 \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{Q} \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2).$$

- 境界条件 (自由すべり) : $\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0.$

スペクトル法

- 水平方向：球面調和函数展開
- 動径方向：チェビシエフ多項式

$$\psi(\lambda, \varphi, r) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^L \hat{\psi}_{nml} Y_n^m(\lambda, \varphi) T_l(r)$$

(λ, φ, r) : (経度, 緯度, 動径)

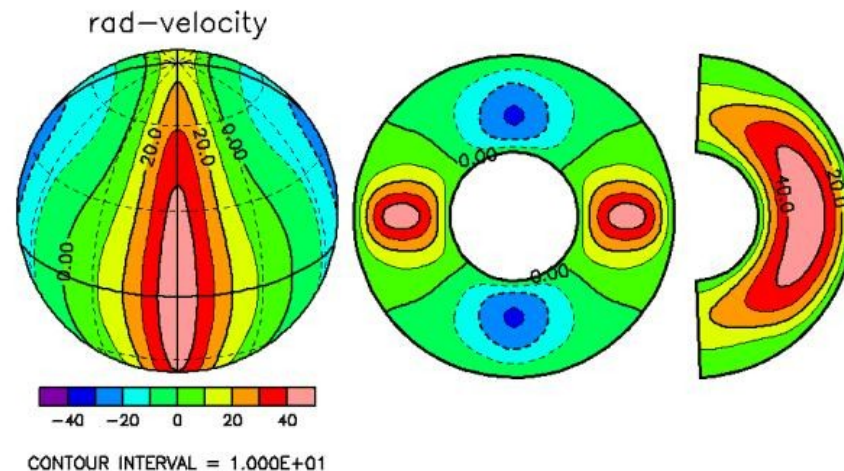
- 非線形項：物理空間で評価しスペクトル空間へ
(変換法)

1970～1980年代
理論計算
(Busse の世界)

1970年代～線形論・回転が遅い場合

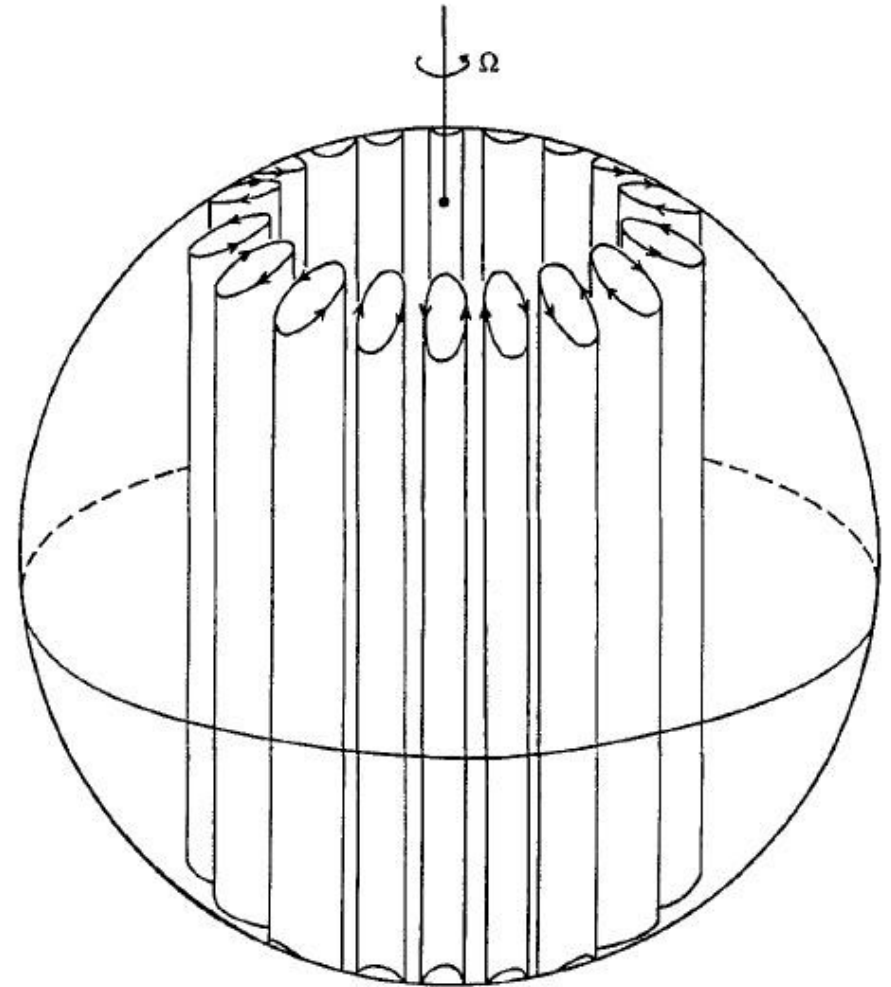
- Busse (1970a)

- 回転が遅い→回転パラメータで擾動展開
- 0次：回転がないときの対流, Y_n^m のモードが縮退
- 1次：retrograde に伝播
- 2次：sectorial 型(Y_n^n)の水平構造が臨界モード



1970年代～線形論・回転が速い場合

- Busse (1970b)
 - 高速回転する球
 - 回転軸方向に一様な運動場を仮定、摂動計算 (テイラー・プラウドマンの定理)
 - 球の中程に対流渦が局所的に発生
 - 対流セルは **prograde** 方向に伝播



テイラー = プラウドマンの定理

- 回転が非常に大きい状況（地衡流バランス）

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \alpha g T r + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

rotation を作用させると（密度一定なので）

$$(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$$

流れは回転軸方向に一様

⇒ 2次元的な運動 (e.g. テイラー柱)

ポテンシャル渦度保存則

円筒座標表示、渦度方程式の回転軸方向(z)成分

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta_z - (\zeta \cdot \nabla) v_z - 2\Omega \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial \phi} + \nu \nabla^2 \zeta_z,$$

ζ_x, ζ_y を無視し変数が z によらないとして z 方向に平均
 z 方向の境界条件 $v_z = \pm v_s (dh/ds)$ を用いると

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + (\mathbf{v}_H \cdot \nabla_H) \zeta_z - (2\Omega + \zeta_z) v_s \frac{1}{h} \frac{dh}{ds} = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial \phi} + \nu \nabla_H^2 \zeta_z,$$

左辺を変形すると

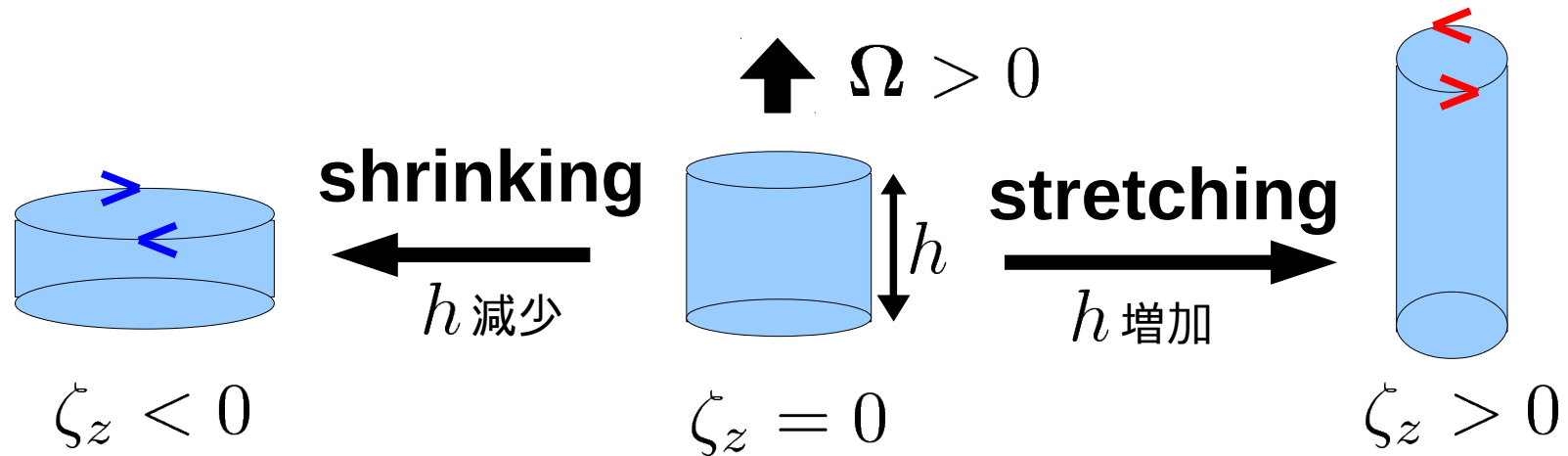
$$h \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla \right) \left(\frac{2\Omega + \zeta_z}{h} \right) = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial \phi} + \nu \nabla_H^2 \zeta_z.$$

右辺が無視できるときポテンシャル渦度が保存

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla \right) q = 0, \quad q \equiv \frac{2\Omega + \zeta_z}{h}.$$

ポテンシャル渦度保存則

- ポテンシャル渦度保存～局所的な角運動量保存



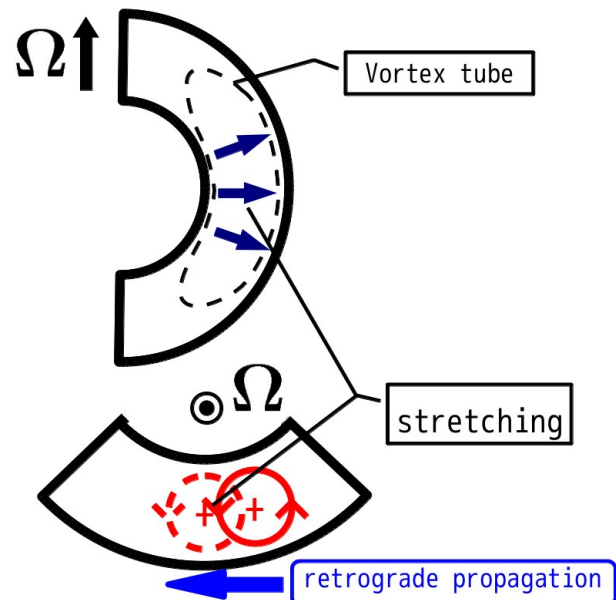
$$\frac{2\Omega + \zeta_z}{h} = \text{const.}$$

対流渦の伝播方向

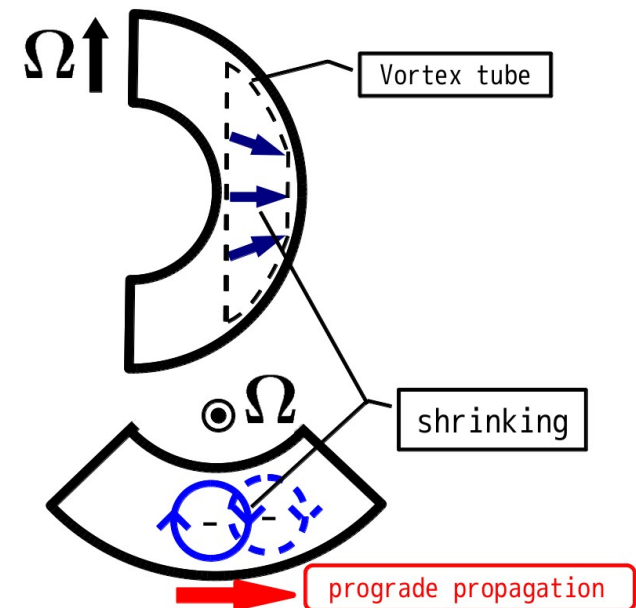
- 回転球殻中の臨界熱対流渦の伝播方向
 - 回転が遅い：回転と逆方向(retrograde)
 - 回転が速い：回転と順方向(prograde)
- 伝播メカニズム
 - 回転が遅い： ???
 - 回転が速い：地形性ベータ効果

対流渦の伝播方向が変わるのは？

- 回転小：retrograde ⇔ 回転大：prograde
- 渦の子午面構造に関係 (Takehiro 2010)
 - 回転小：球殻に沿って反り曲がる
 - 回転大：回転軸方向に伸び、外側境界でつぶされる



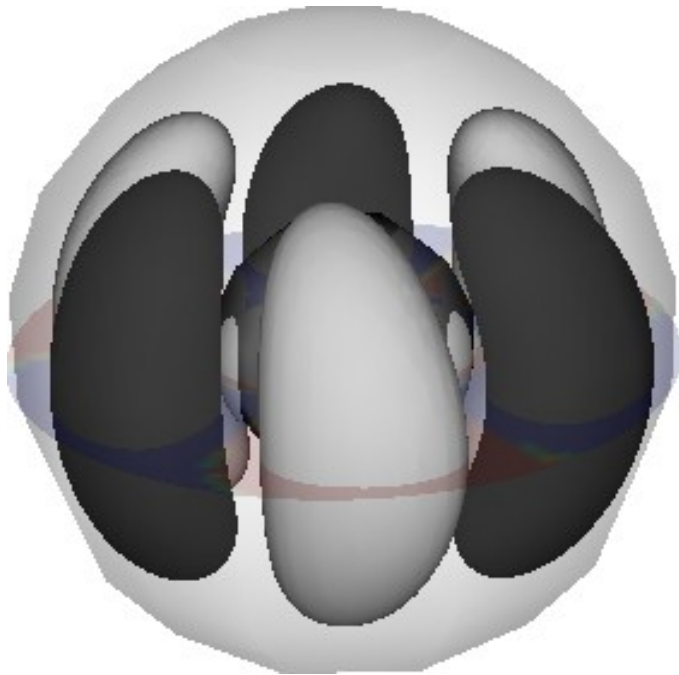
回転小：retrograde 伝播



回転大：prograde 伝播

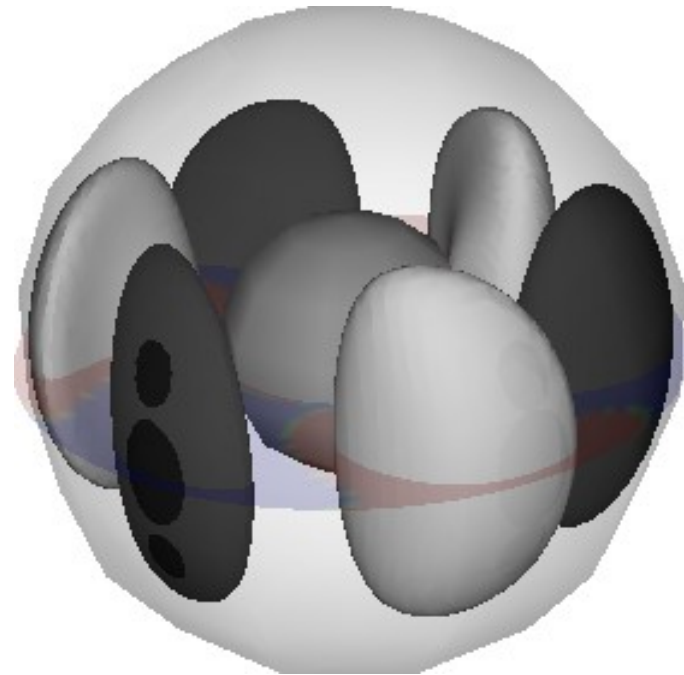
臨界モードの構造の比較

$E=0.1, P=1$



回転が遅い場合

$E=0.01, P=1$

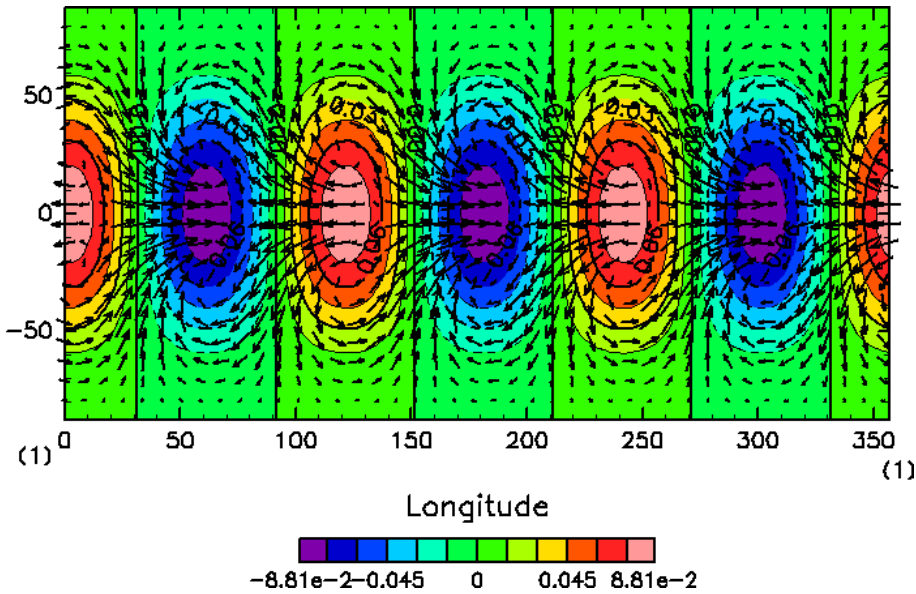


回転が速い場合

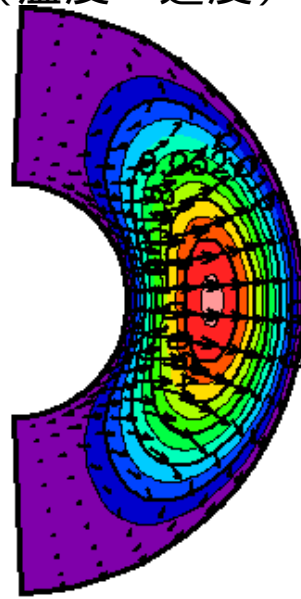
渦度の絶対値の等値面（黒が緯度成分が負の値、白が正の値）

臨界モード(回転が遅い場合)

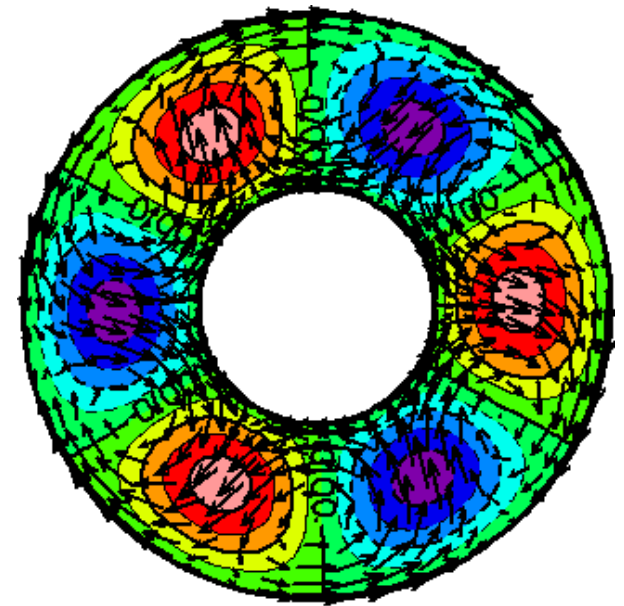
温度場 (中層) と速度場 (上層)



子午面断面
(温度・速度)



赤道断面 (温度・速度)

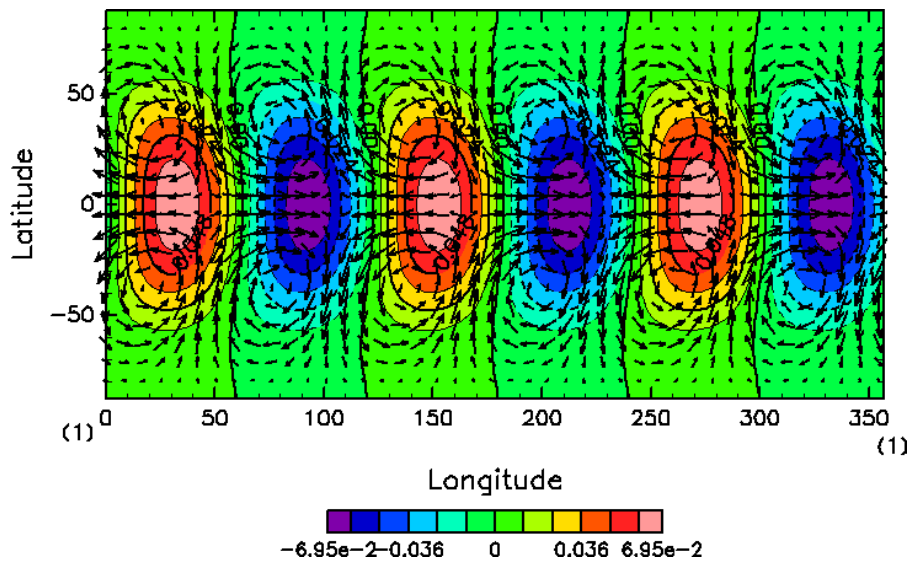


$$E=0.1, P=1$$

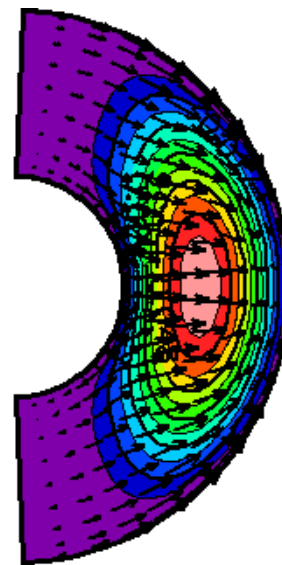
- ・ 球殻に沿ったバナナ状の渦
- ・ 赤道動径外向き流に伴い中高緯度へ広がる流れ

臨界モード(回転が速い場合)

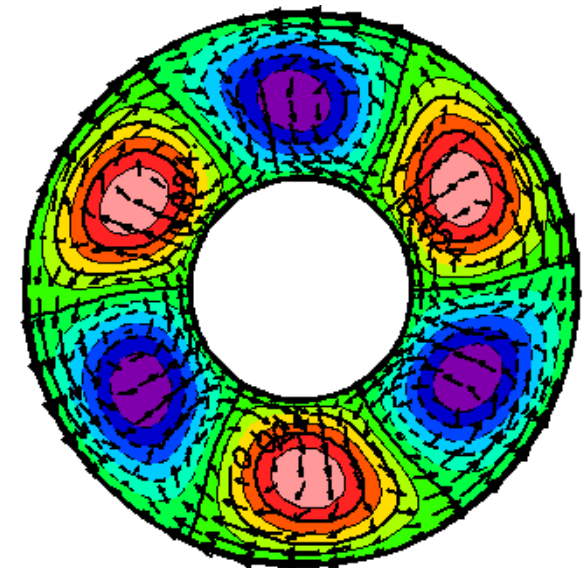
温度場（中層）と速度場（上層）



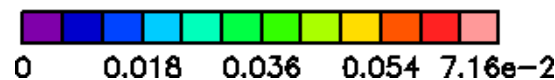
子午面断面
(温度・速度)



赤道断面（温度・速度）



$$E=0.01, P=1$$



- ・ 回転軸に沿ったテイラー柱型の渦
- ・ 赤道動径外向き流に伴い中高緯度から集まる流れ

渦度収支解析

渦度方程式の緯度成分

(Takehiro, 2010)

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} = \frac{2}{E} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_r \sin \theta}{r} \right) + \frac{R}{Er_o} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}$$

渦度時間変化

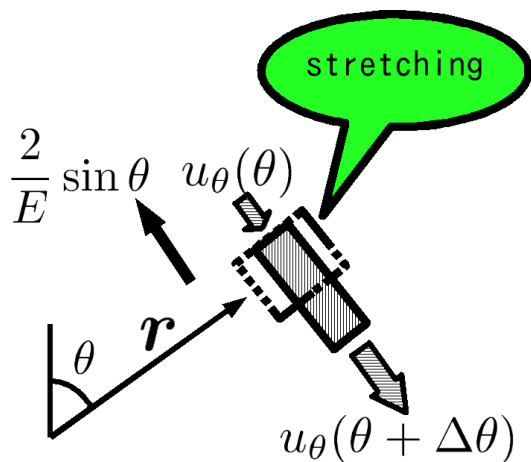
惑星渦度の伸縮
(速度緯度成分)

惑星渦度の傾け

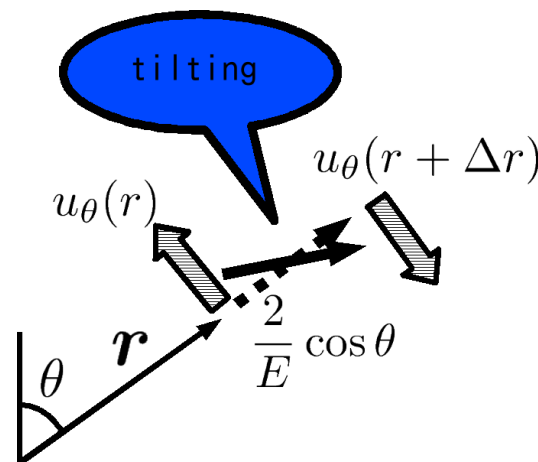
惑星渦度の伸縮
(速度動径成分)

浮力による渦度生成

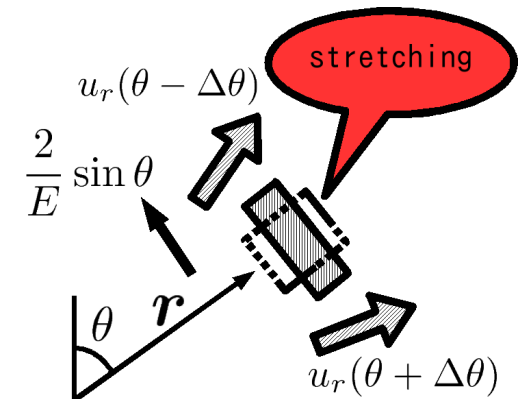
$$+ \left[\nabla^2 \omega_\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \text{粘性散逸}$$



惑星渦度の伸縮
(速度緯度成分)



惑星渦度の傾け



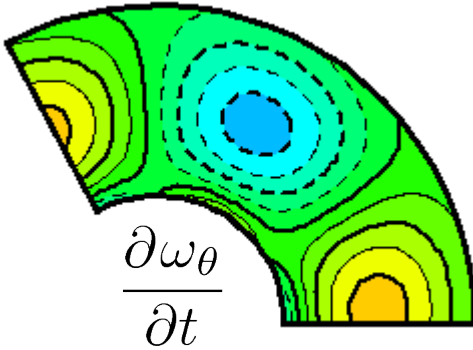
惑星渦度の伸縮
(速度動径成分)

渦度収支解析

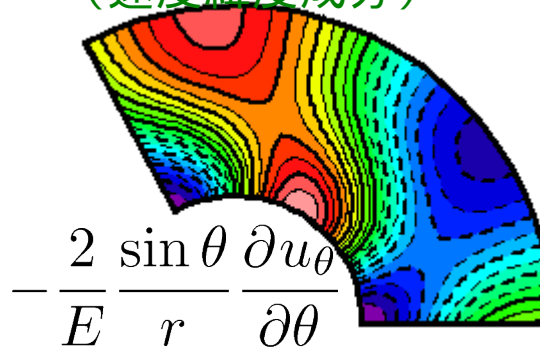
- 渦度方程式の各項の分布(赤道面)

$E=0.1, P=1$

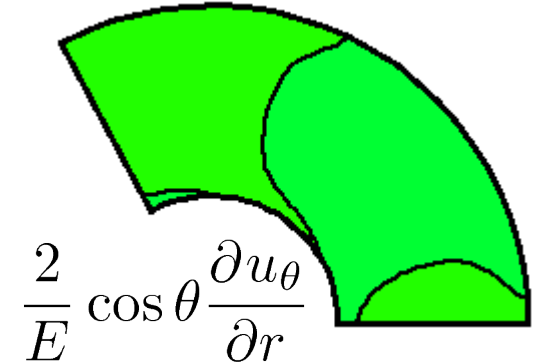
渦度時間変化



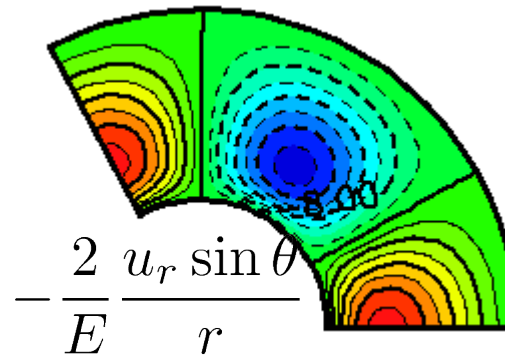
惑星渦度の伸縮
(速度緯度成分)



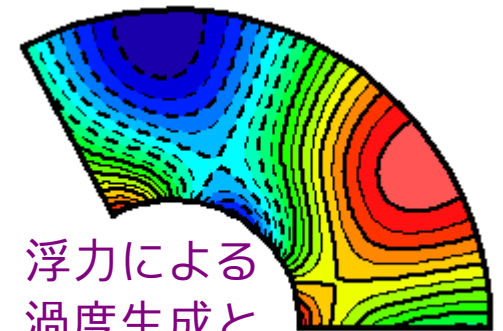
惑星渦度の傾け



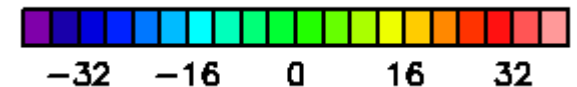
低緯度では
惑星渦度の伸縮
(速度動径成分)
卓越



惑星渦度の伸縮
(速度動径成分)



浮力による
渦度生成と
粘性散逸項

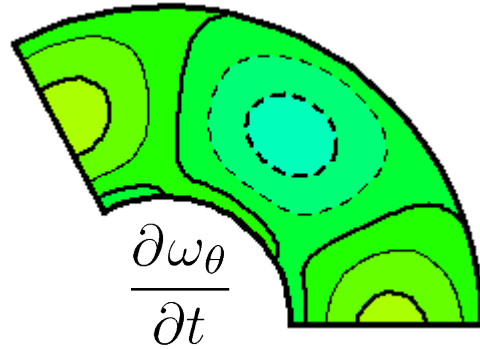


渦度収支解析

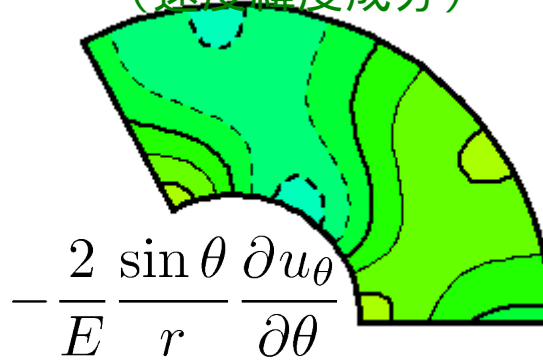
- 渦度方程式の各項の分布(中緯度)

$E=0.1, P=1$

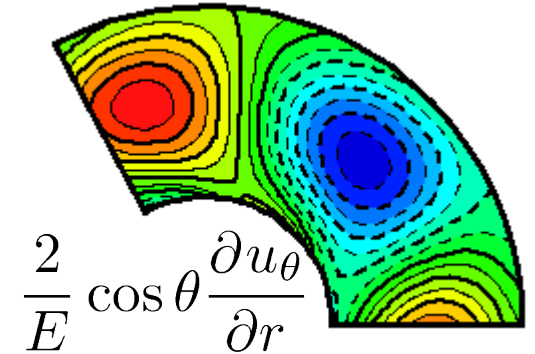
渦度時間変化



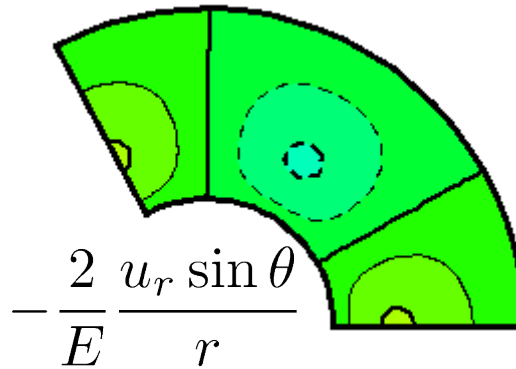
惑星渦度の伸縮
(速度緯度成分)



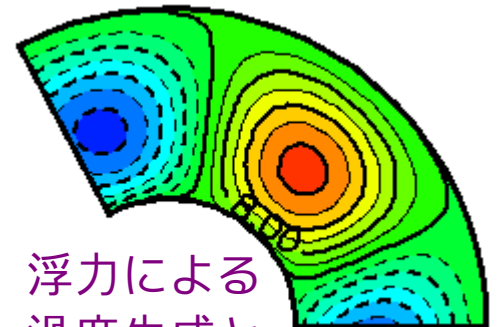
惑星渦度の傾け



中緯度では
惑星渦度の傾け
卓越



惑星渦度の伸縮
(速度動径成分)



浮力による
渦度生成と
粘性散逸項

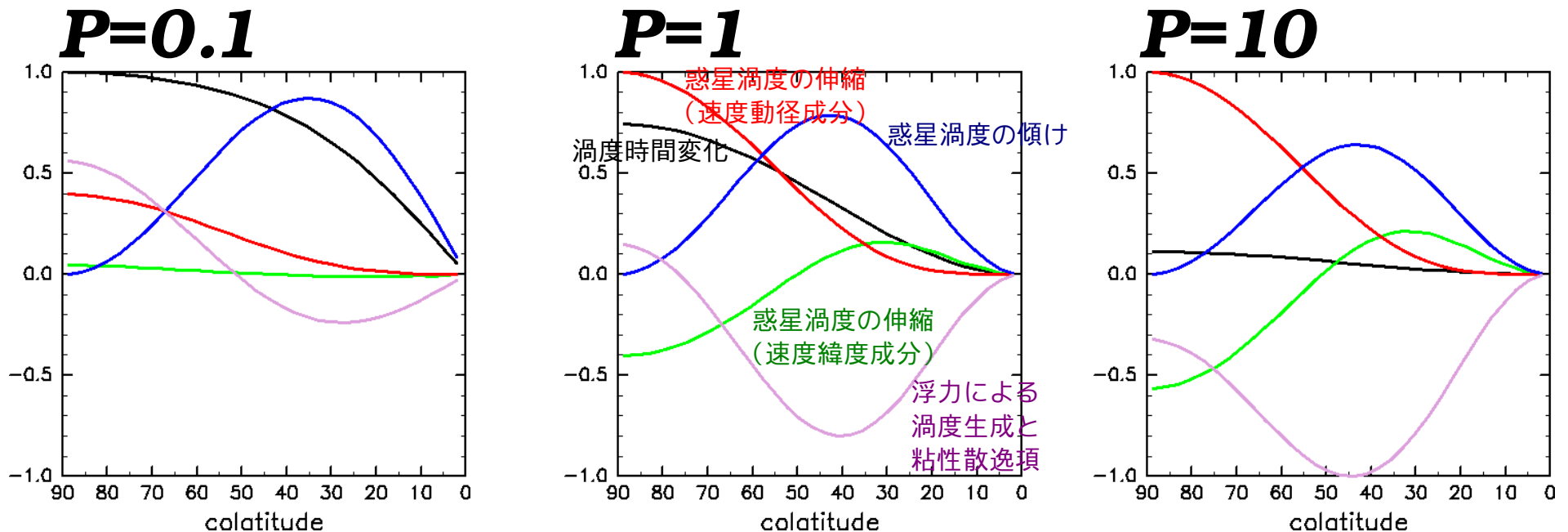


プランドル数依存性

- 渦度方程式の各項の大きさの比較

$E=0.1$

- 赤道面で渦度時間変化最大の点での緯度分布

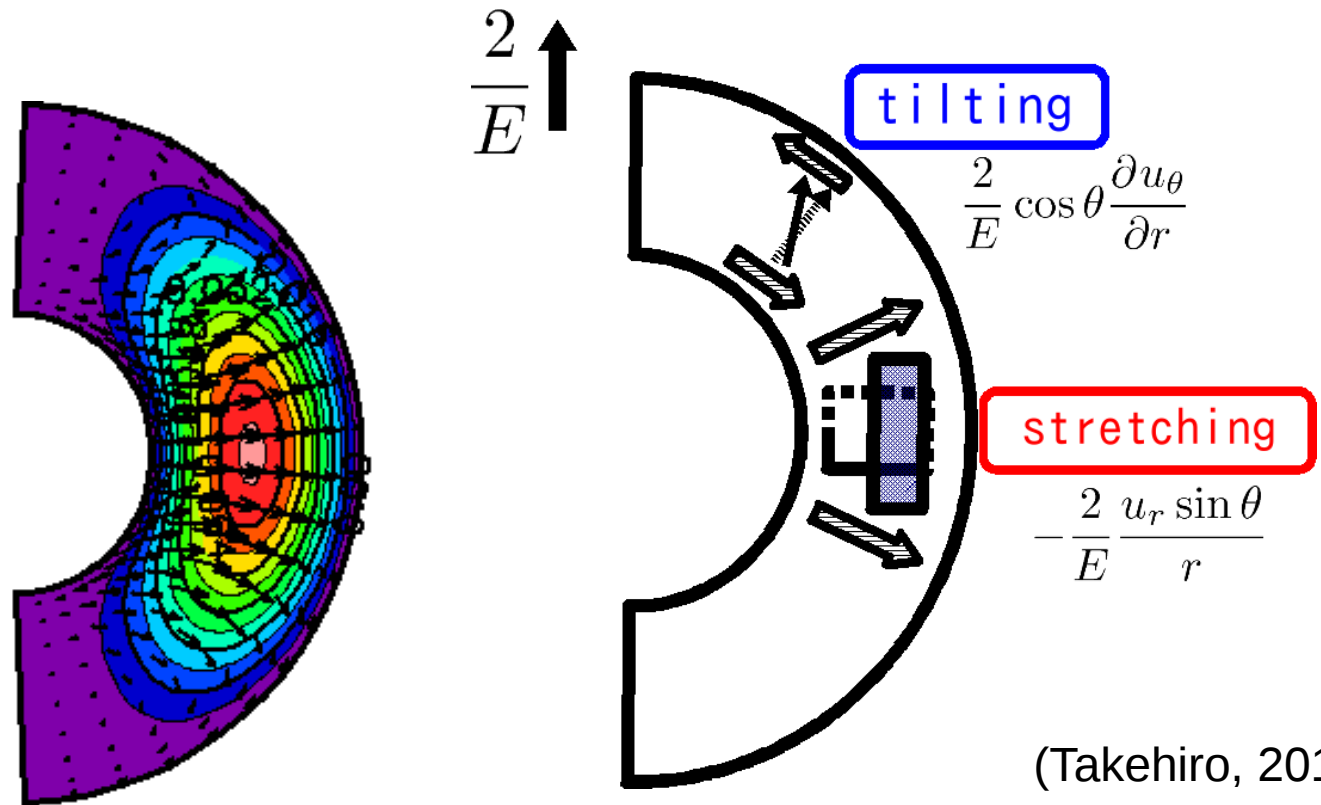


- 低緯度：速度動径成分による惑星渦度の伸縮
- 高緯度：惑星渦度の傾け

(Takehiro, 2010)

対流セルの伝播方向：まとめ

- 回転が遅い場合の臨界対流の逆行メカニズム
 - 赤道付近：速度動径成分による惑星渦度の伸縮
 - 中高緯度：惑星渦度の傾け



(Takehiro, 2010)

Busse の漸近理論

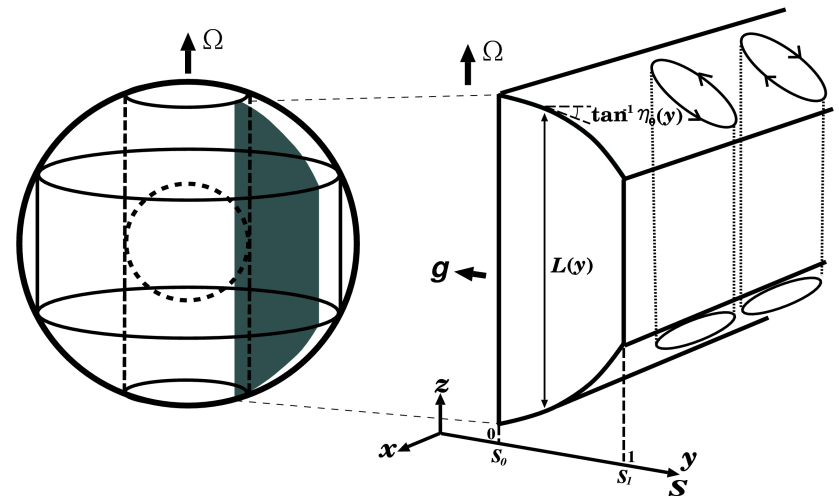
- Busse (1970b) による高速回転での漸近状態
 - 球の中程に対流渦が局所的に発生
 - 臨界東西波数、臨界レイリー数、臨界振動数

$$k_c \sim E^{-1/3}, R_c \sim E^{-4/3}, \omega_c \sim E^{-2/3}$$

- 本質は高速回転円筒モデル

高速回転する円筒対流モデル

- モデルの仕様
 - 円筒の上下面：傾いている（傾き $\eta(y)$ ）
 - 高速に回転→流れは回転軸方向に一様（2次元の）
 - 重力が円筒内向きに働く
 - 円筒内外の温度差→対流を駆動



高速回転円筒対流モデル

- 支配方程式

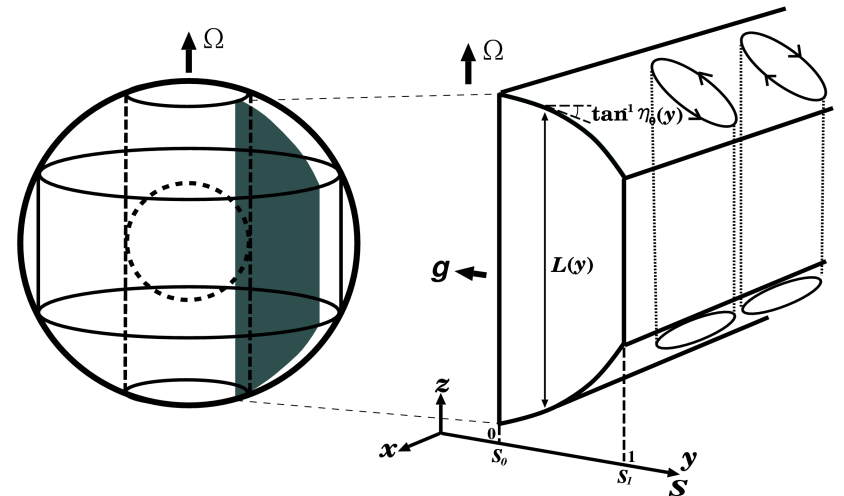
$$\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{P} J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = R \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 \nabla^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 \theta.$$

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \theta = 0, \quad \text{at } y = 0, 1.$$

- 地形性ベータパラメータ

$$\beta(y) = \frac{\eta(y)}{4EL(y)}$$



(Busse 1986, Takehiro et al. 2008)

高速回転円筒対流モデル：線形化

- 傾き(β)一定、線形化

$$\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = R \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 \nabla^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 \theta.$$

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \theta = 0, \quad \text{at } y = 0, 1.$$

- 解を $(\psi, \theta) = (\psi_0, \theta_0) e^{i(kx - \omega t)} \sin(n\pi y)$ の形に仮定
→分散関係

$$\frac{K^2}{P} \omega^2 + \left[\beta k + iK^4 \left(1 + \frac{1}{P} \right) \right] + i\beta k K^2 - K^6 + k^2 R = 0, \quad K^2 = k^2 + n^2 \pi^2$$

高速回転円筒対流：臨界状態

- 臨界状態 → ω を実数、実部と虚部に分ける

$$\frac{K^2}{P}\omega^2 + \beta k\omega - K^6 + k^2 R = 0, \quad K^4 \left(1 + \frac{1}{P}\right)\omega + \beta k K^2 = 0.$$

- 虚部から対流渦の振動数が求まる

$$\omega = -\frac{P}{P+1} \frac{\beta k}{K^2}$$

- 実部から中立レイリー数が求まる

$$R = \frac{K^6}{k^2} + \left(\frac{P}{P+1}\right)^2 \frac{\beta^2}{K^2}$$

高速回転円筒対流：漸近解

- 高速回転 $\rightarrow \beta$ 大での漸近状態 $\rightarrow K^2 \rightarrow k^2$

$$R \sim k^4 + \left(\frac{P}{P+1} \right)^2 \frac{\beta^2}{k^2}$$

- 臨界状態

$$k_c \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P}{P+1} \beta \right)^{1/3}, \quad R_c \sim 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P}{P+1} \beta \right)^{4/3}, \quad \omega_c \sim \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P}{P+1} \beta \right)^{2/3}$$

- 漸近性質： $k_c \sim \beta^{1/3}, R_c \sim \beta^{4/3}, \omega_c \sim \beta^{2/3}$

$$k_c \sim E^{-1/3}, \quad R_c \sim E^{-4/3}, \quad \omega_c \sim E^{-2/3}$$

高速回転円筒対流：漸近状態

- 回転大での漸近状態の解釈

- 波数：粘性とベータ項のバランス

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim \nabla^2 \nabla^2 \psi \rightarrow k \sim \beta^{1/3}$$

- 振動数：ロスビー波

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi \sim \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \omega \sim \beta/k \sim \beta^{2/3}$$

- レイリー数：浮力トルクとベータ項のバランス

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \sim \nabla^2 \theta \rightarrow \theta \sim \psi/k, \quad \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim R \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow R \sim \beta \psi / \theta \sim \beta k \sim \beta^{4/3}$$

Busse (1970) の簡単な見積もり方

- 一定に傾いた回転円筒対流の中立曲線と臨界値

$$R = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} + \frac{P}{P+1} \frac{\beta^2}{k^2 + \pi^2}, \quad R_c \sim \beta^{4/3}$$

- 球に適用すると

- 浮力が動径の2乗に比例： $R_c \rightarrow s^2 R_c$,

- 地形性β項： $\beta \sim (1/H)(dH/ds) = s/(1 - s^2)$,

$$R_c \sim \left(\frac{s}{1 - s^2} \right)^{4/3} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{[(1 - s^2)^2 s]^{2/3}},$$

- $(1 - s^2)^2 s$ が最大となるのは $s = 1/\sqrt{5} \sim 0.45$.

球の中程で対流が発生するのは？

- 対流を発生させる要因：内部熱源と重力

$$g \propto r, dT_B/dr \propto r \Rightarrow \text{不安定度 } r^2 \text{ に比例}$$

- 対流を妨げる要因：球の傾き（地形性 β 効果）

$$\beta = -\frac{2\Omega}{H} \frac{dH}{dr} = \frac{4\Omega r}{1-r^2}$$

- 外側：傾きがきつくなり対流を妨げる
 - 内側：浮力が弱くなり対流が発生しなくなる
- ⇒ 球殻中程でもっとも対流がおこりやすい

対流の発生場所

- 対流の発生場所

- 重力分布

- 密度一様の自己重力 or 内球の重力 $g(r) \propto r$, or $1/r^2$

- 基本場温度分布

- 一様内部熱源 or 上下温度差のみ $\bar{T}(r) \propto r^2$ or $1/r$

- たとえば上下温度差のみの基本場温度

- 対流渦は内球に接するように発生

対流の発生場所

$$E = 10^{-4}$$

$$P = 1$$

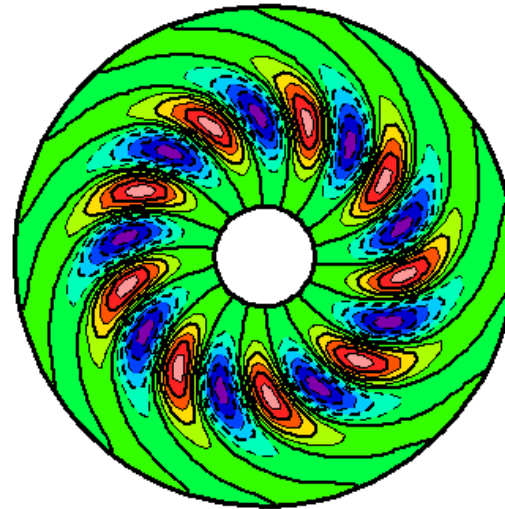
$$\eta = 0.2$$

重力分布
 $g(r) \propto r$

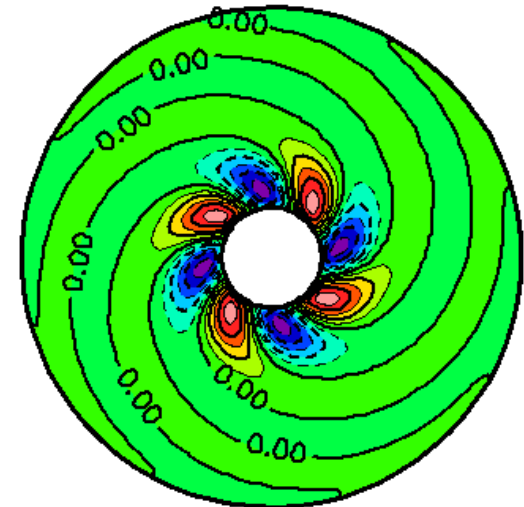
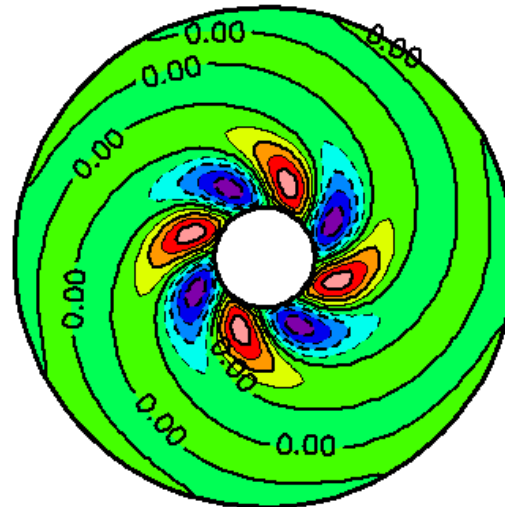
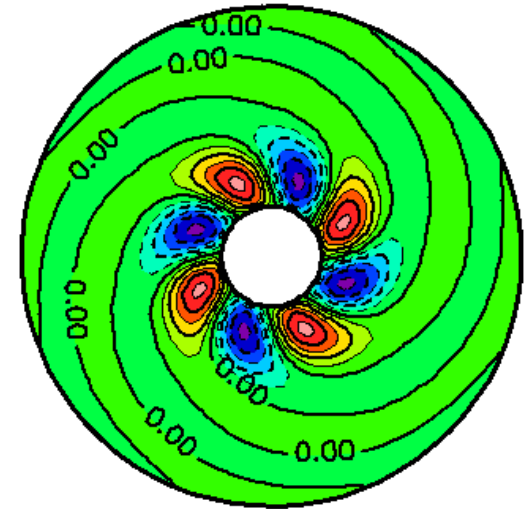
速度動径成分
(赤道断面)

重力分布
 $g(r) \propto \frac{1}{r^2}$

内部熱源あり



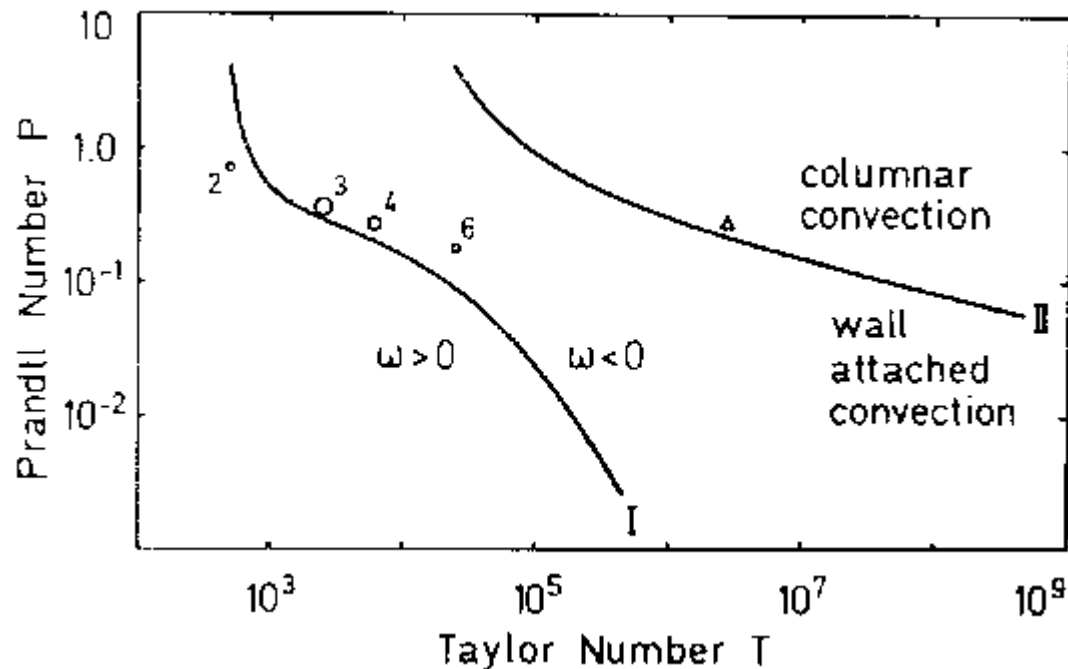
内部熱源なし



1980年代後半～
臨界モードの数値計算

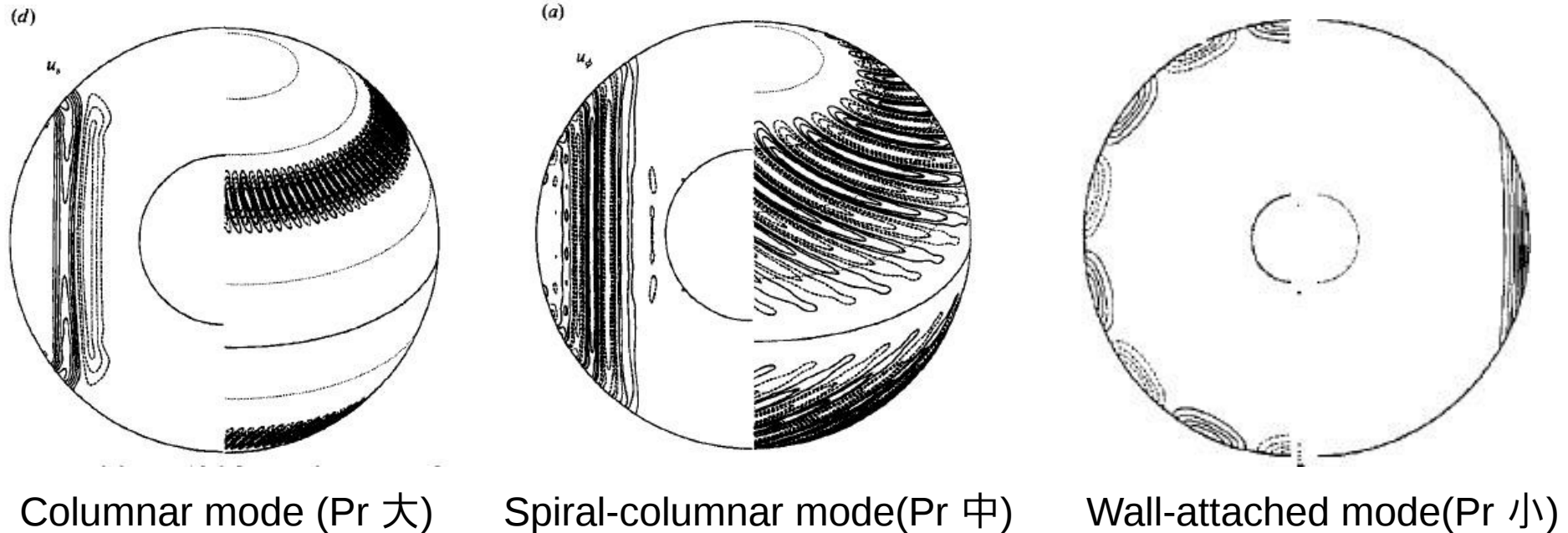
1980年代～数値計算の黎明期

- Zhang and Busse (1987)
 - 広い範囲で臨界モードを数値的に求めた
 - 赤道壁面モード (equatorially wall-attached) の発見



(Zhang and Busse 1987)

1980年代～数値計算の黎明期



- Zhang (1992)

- 臨界モードの数値計算（高速回転, Taylor 数 $O(10^{11})$ ）
- 対流渦は局在しない \Leftrightarrow Busse (1970b)
 - 螺旋状に延びる（螺旋状柱状モード, spiral-columnar）
 - 赤道に張りつく（赤道壁面モード, equatorially wall-attached）

螺旋状対流の解釈

- 数学的な記述：2000年ごろに解決したらしい
 - Jones et al. (2000), Dormy et al. (2003)
 - Busse (1970b) の漸近展開の見直し、正しく?展開すれば螺旋状構造が記述できるらしい
- 物理的な理解をしたい
 - ロスビー波の性質で議論してみる

(地形性)ロスビー波

局所直交座標系, 静止状態, $h = H(y)$ の周りで線形化

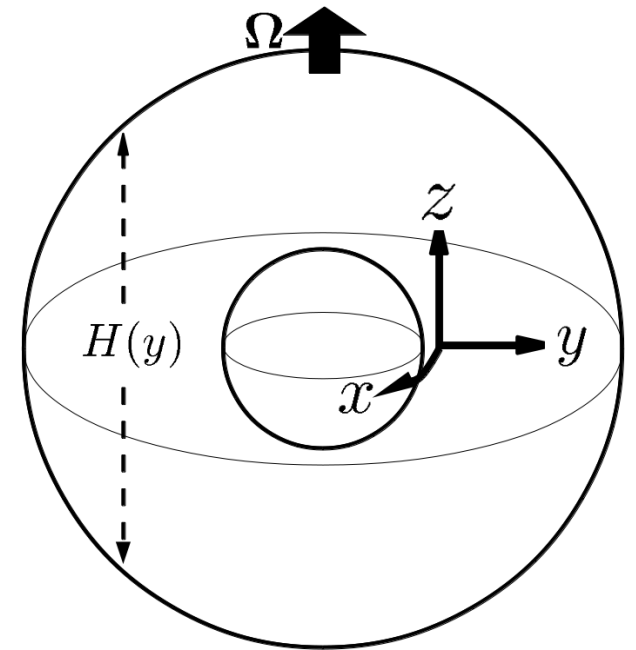
$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + \beta(y)v_y = 0, \quad \beta(y) \equiv -\frac{2\Omega}{H} \frac{dH}{dy} \quad (\text{地形性}\beta\text{効果})$$

流線関数 ψ を導入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

β 一定, 平面波解 $\psi \propto e^{i(kx+ly-\omega t)}$

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$



$dH/dy < 0, \beta > 0$ よりロスビー波は東 ($x < 0$) に伝播

螺旋状対流とロスビー波

- 螺旋状構造の出現の理由

- ~~外側ほど傾きが大きい
⇒ロスビー波の位相速度大きい
⇒外側ほど速く伝播
⇒波面が傾く~~

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

- 間違い：臨界モードだから位相速度はどこでも同じ
- 正解：位相速度を一定に保つべく動径方向波数 l が変化する ⇒ 螺旋状に傾く

螺旋状対流とロスビー波

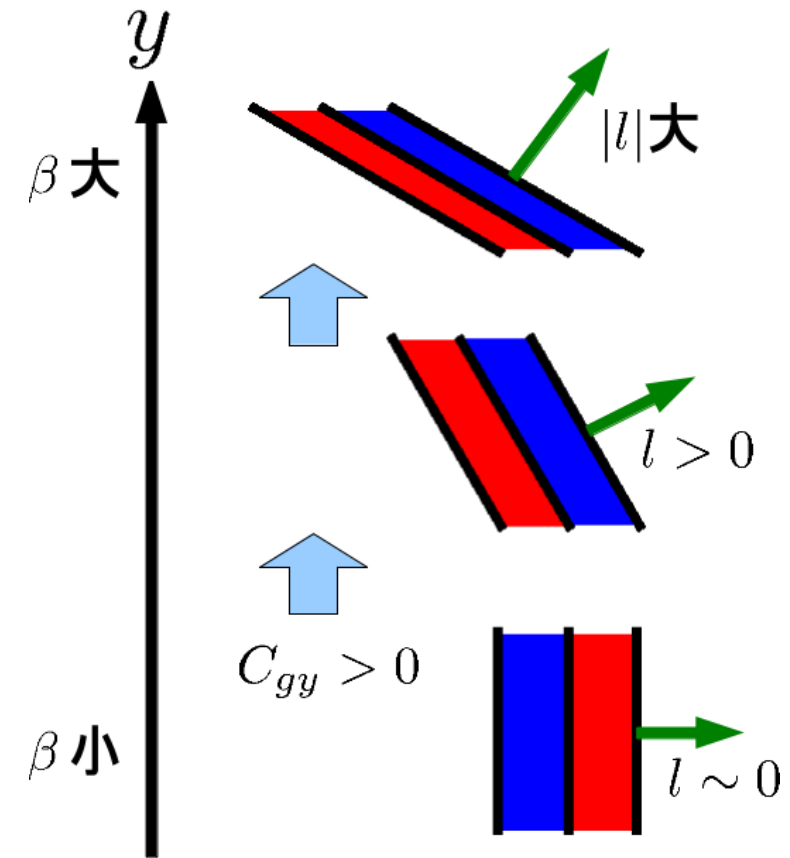
- β の y 方向の変化 $\Rightarrow y$ 方向波数 l が変化
(ω, k は一定に保たれる)

$$l(y) = \pm \sqrt{-k^2 - \frac{\beta(y)k}{\omega}}$$

- β 大 $\Rightarrow |l|$ 大 ($\omega < 0$ に注意)
 \Rightarrow 外側ほど波面が傾く
 \Rightarrow 螺旋状パターン

- 傾く向き
 \Rightarrow 内から外へロスビー波伝播
(内側で対流不安定大)

\Rightarrow 群速度 $C_{gy} = \frac{2\beta kl}{k^2 + l^2} > 0 \rightarrow l > 0$



支配方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + P \eta(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = PR \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \nabla^2 \nabla^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 \theta.$$

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \theta = 0, \quad \text{at } y = 0, 1.$$

- 球の形状の効果:

$$\eta(y) = \frac{2s(y)}{E[r_o^2 - s(y)^2]}, \quad s(y) = s_0 + (s_1 - s_0)y,$$

- P: プラントル数, R: レイリー数, E: エクマン数

局所分散関係の導出

- 熱と粘性の効果を無視

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + P\eta(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

- ゆっくりと振幅が変調する波型の解

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{\psi}_n(X, Y, T) \exp[i\phi(X, Y, T)/\varepsilon],$$
$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad T = \varepsilon t$$

- 地形性 β 効果の係数もゆっくり変化する： $\eta = \eta(Y)$

局所分散関係と波数・振動数

- ε^0 の式 \rightarrow 局所分散関係

$$\omega = -\frac{P\eta(Y)k}{k^2 + l^2}, \quad \omega = -\frac{\partial\phi}{\partial T}, \quad k = \frac{\partial\phi}{\partial X}, \quad l = \frac{\partial\phi}{\partial Y}$$

- 振動数、波数の式

$$\frac{\partial\omega}{\partial T} = -C_{gx} \frac{\partial\omega}{\partial X} - C_{gy} \frac{\partial\omega}{\partial Y}, \quad \frac{\partial k}{\partial T} = -C_{gx} \frac{\partial k}{\partial X} - C_{gy} \frac{\partial k}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial l}{\partial T} = -C_{gx} \frac{\partial l}{\partial X} - C_{gy} \frac{\partial l}{\partial Y} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial Y} \right)_{k,l}, \quad C_{gx} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k} \right)_l$$

- ω, k は保存、 l は保存しない $C_{gy} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial l} \right)_k$

局所分散関係を用いた解の構成

- l の変化：局所分散関係から

$$l(y) = \pm \sqrt{-\frac{P\eta(y)k}{\omega} - k^2}$$

- この $l(y)$ を用いて解を構成できる

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi}_0 \exp \left\{ i \left(kx + \int_{0.5}^y l(y) dy \right) \right\},$$

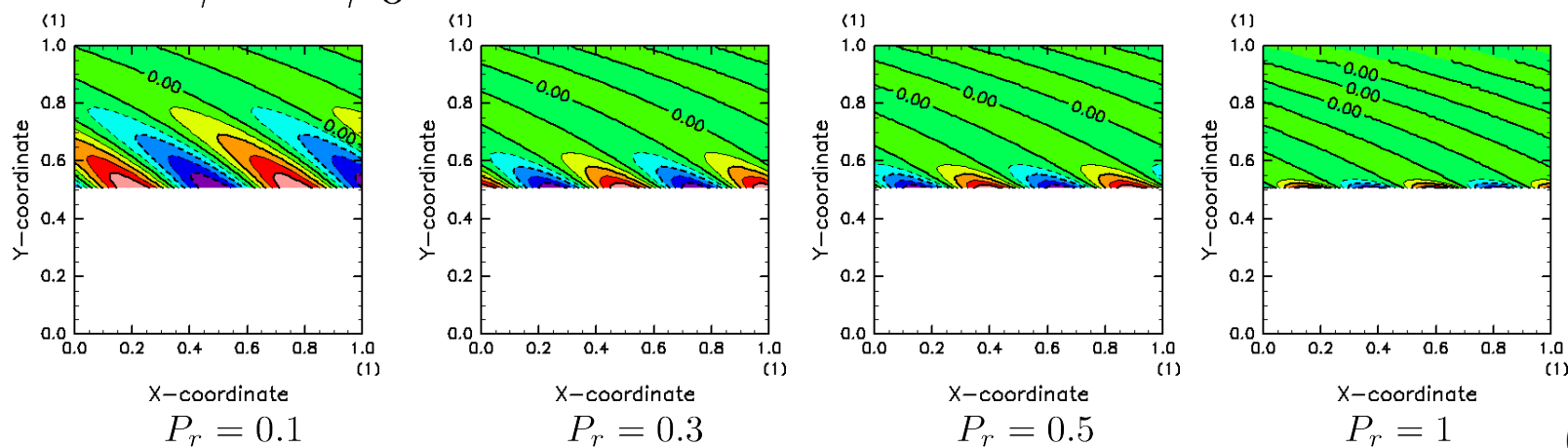
- さらに粘性の効果を考慮すれば

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi}_0 \exp \left\{ i \left(kx + \int_{0.5}^y l(y) dy \right) \right\} \cdot \exp \left\{ - \int_{0.5}^y \frac{P(k^2 + l(y)^2)}{C_{gy}(y)} dy \right\},$$

螺旋状対流と柱状対流 ～プラントル数依存性

- プラントル数小 \Rightarrow 粘性小
 \Rightarrow ロスビー波遠くまで伝播 \Rightarrow 螺旋状対流
- プラントル数大 \Rightarrow 粘性大
 \Rightarrow ロスビー波すぐに減衰 \Rightarrow 柱状対流
- 波線理論で計算：

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx + \int l(y) dy - \omega t)} \cdot e^{-\int P_r (k^2 + l(y)^2 / C_g y(y)) dy}$$

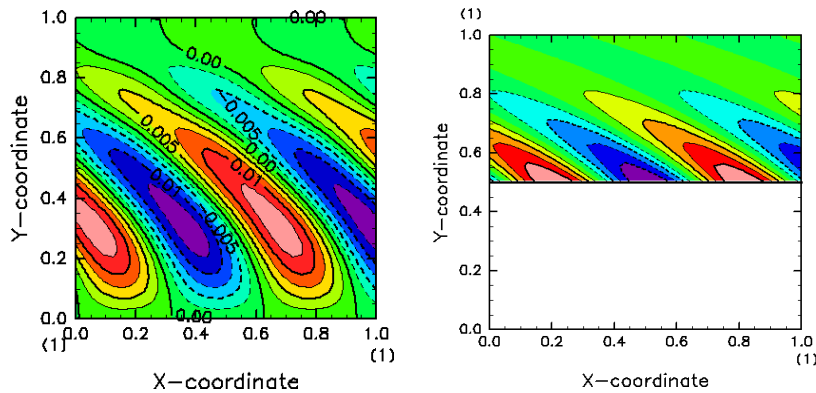


ロスビー波の伝播距離

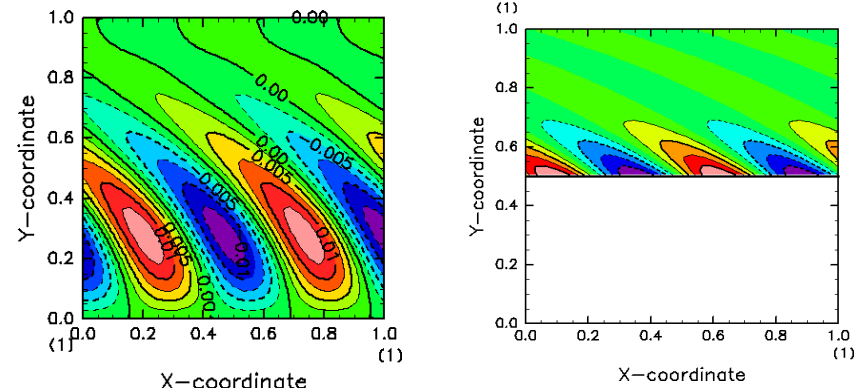
- 粘性の効果を導入

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi}_0 e^{i(kx + \int_0^y l(y) dy) - \int_{y_0}^y P(k^2 + l(y)^2) / C_{gy}(y) dy},$$

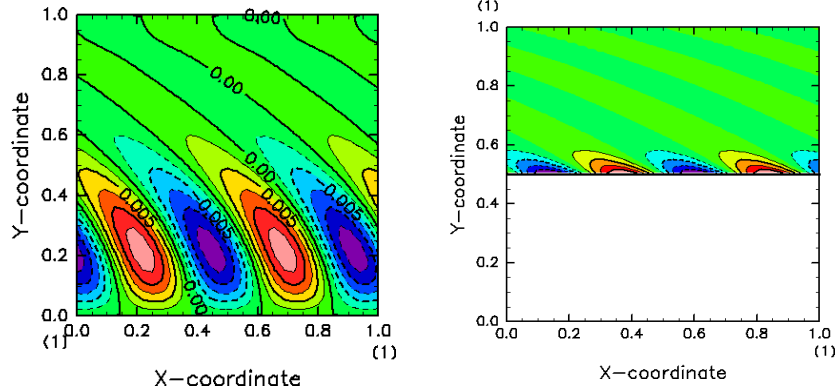
P=0.1



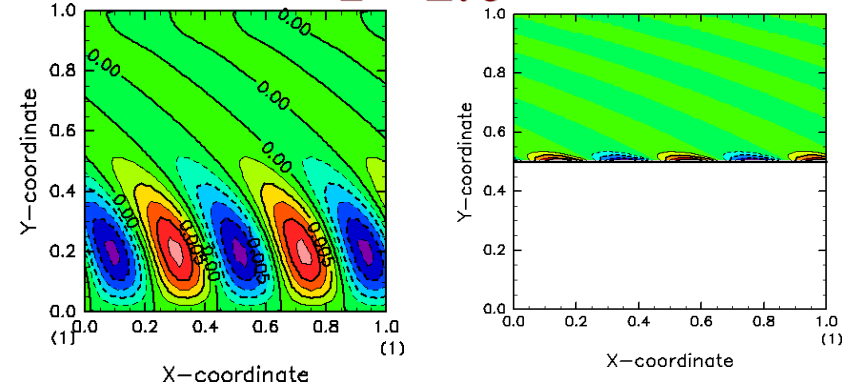
P=0.2



P=0.5



P=1.0



回転球殻対流の運動エネルギー収支

- 運動エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{p}{E} \mathbf{u} \right) + \frac{R_a}{E} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r_o} \Theta - \nabla \cdot \Phi + D_k$$

運動エネルギーの
時間変化=0

ロスビー波による
エネルギー輸送収束

浮力による
エネルギー
生成

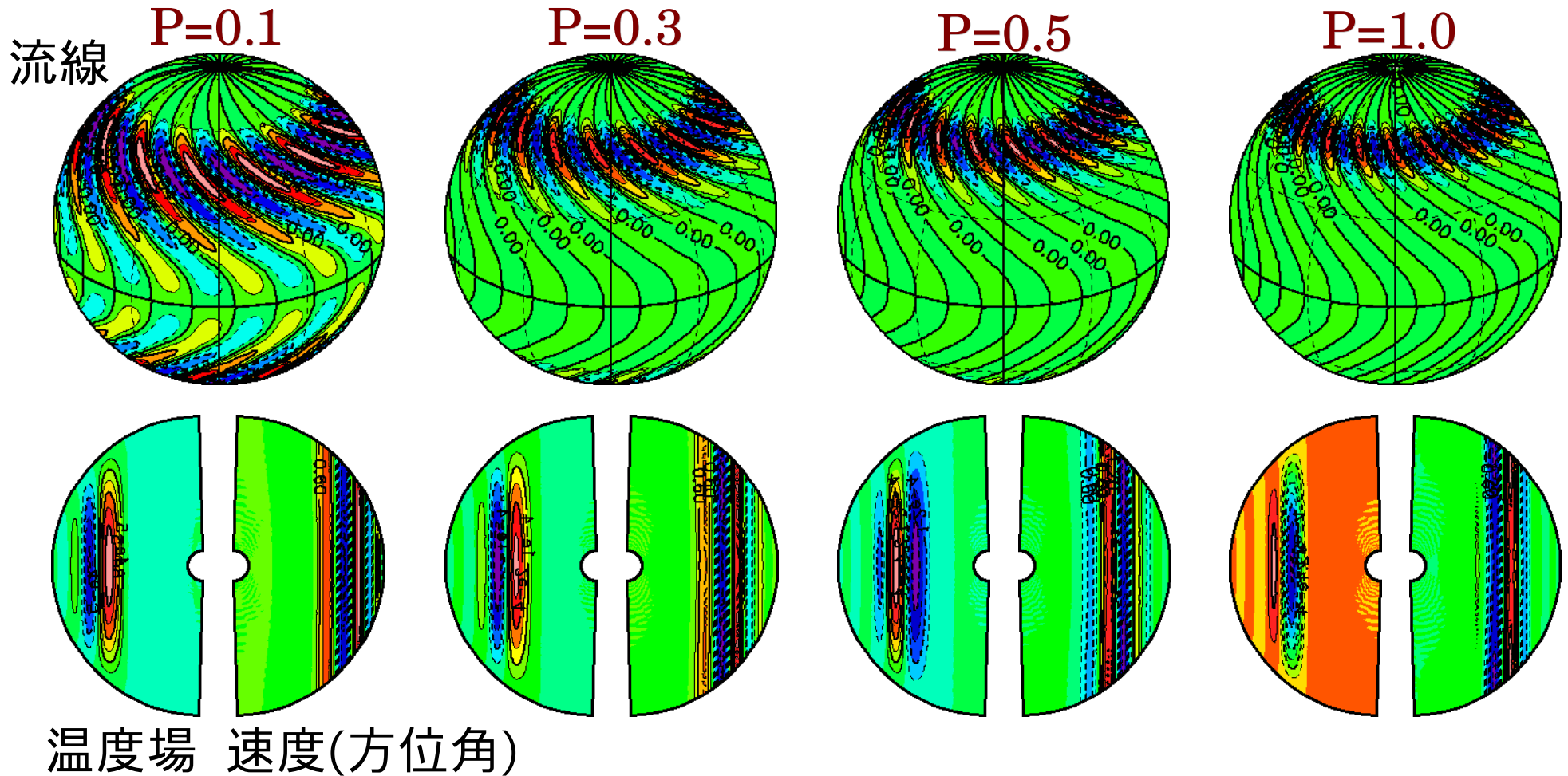
粘性散逸
粘性によるエネルギー
輸送収束(ほぼ0)

- 粘性輸送・散逸項の表現

$$\Phi_i = - \sum_j \sigma_{ij} u_j, \quad D_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2$$

高速回転する球殻内の臨界対流

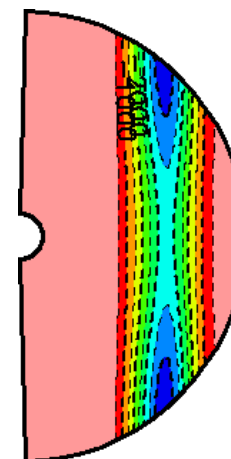
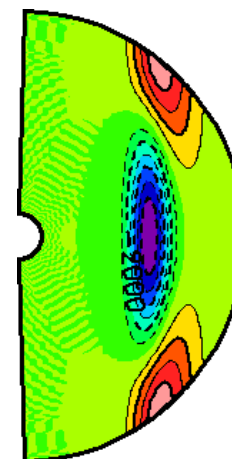
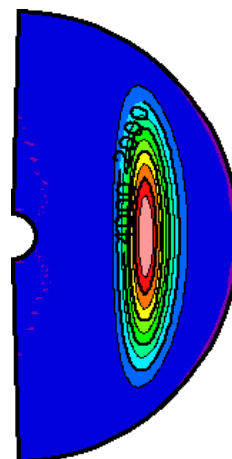
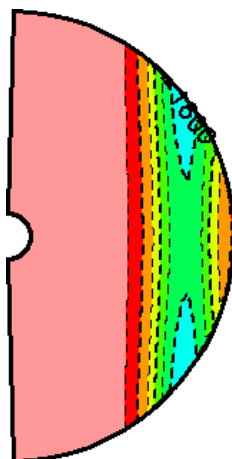
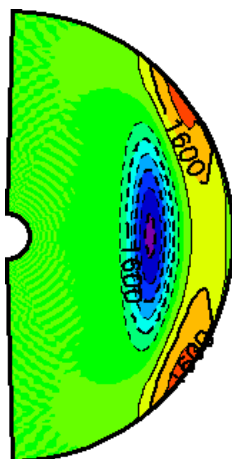
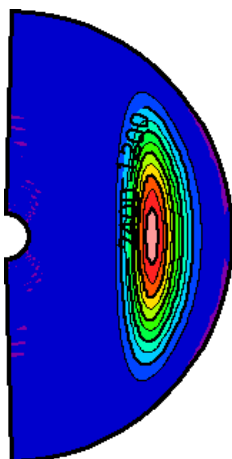
- $E = 10^{-5}$ の場合



回転球殻対流のエネルギー解析

P=0.1

P=0.3



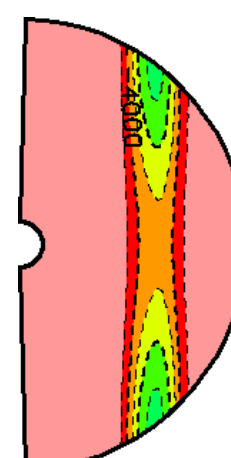
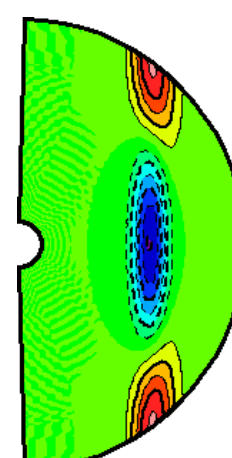
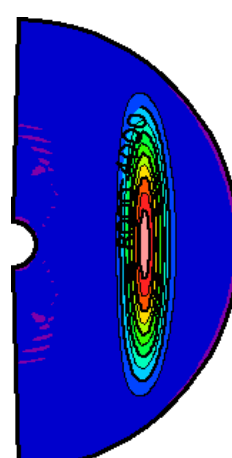
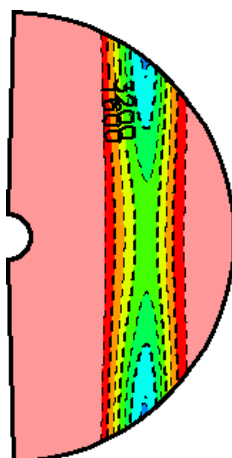
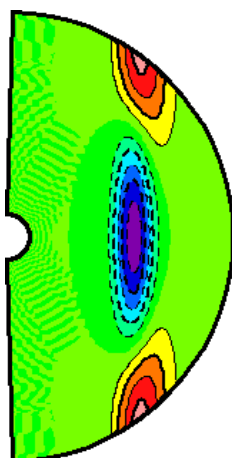
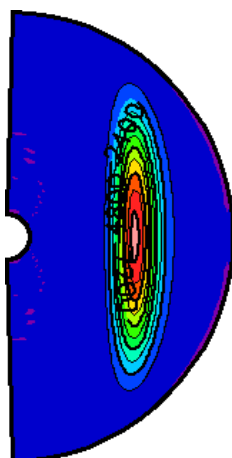
浮力生成

ロスビー波

粘性散逸

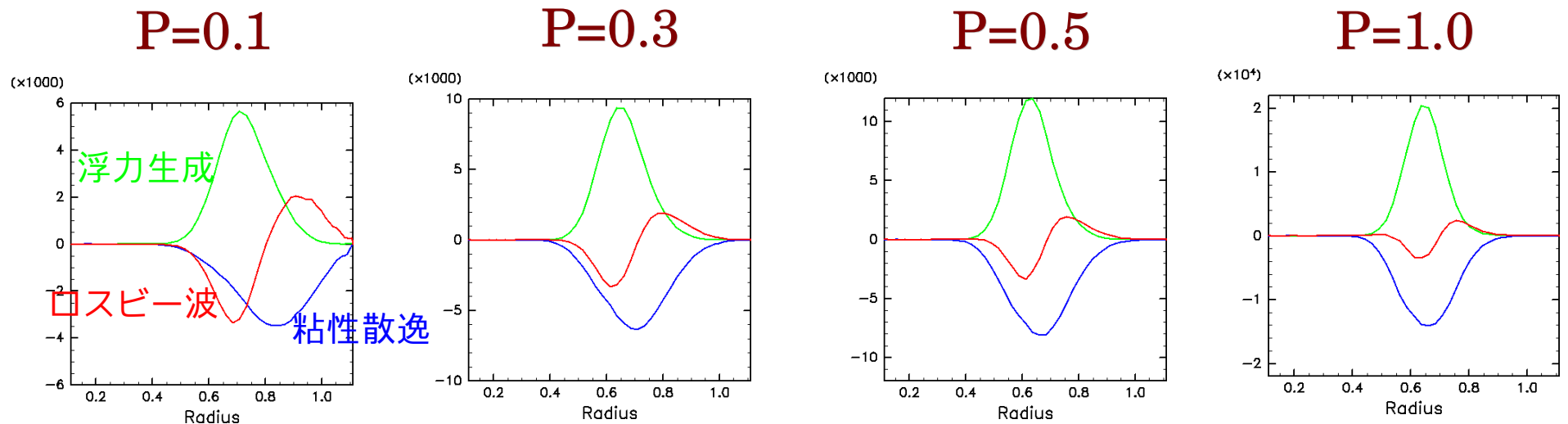
P=0.5

P=1.0



回転球殻対流のエネルギー解析

- 回転軸方向に積分した運動エネルギー収支各項



- プランドル数小：ロスビー波による外向き輸送

赤道壁面モード

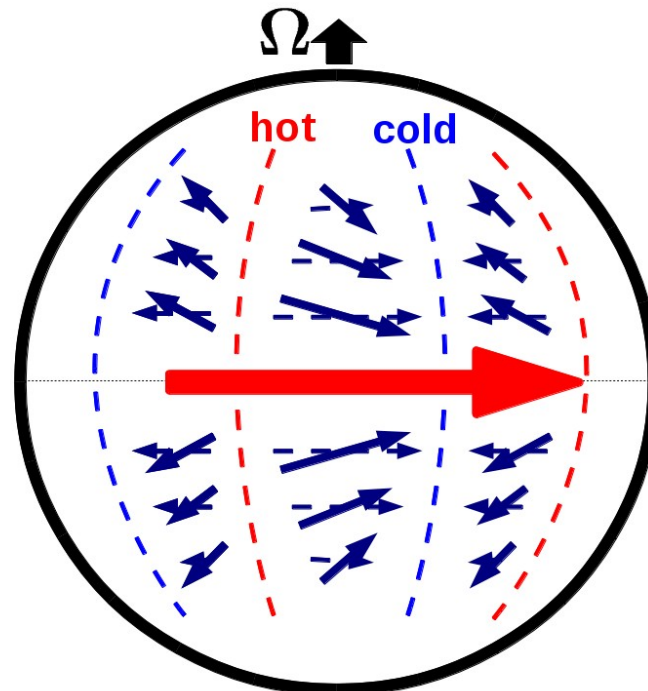
- プランドル数小さい → 赤道壁面モードの出現
 - ロスビー波で解釈できる？
- 螺旋状対流の出現困難になる理由（の試案）
 - プランドル数小 → 螺旋が延びる → 動径波数大
→ 粘性散逸大 → 対流するのが難しくなる？

対流による帯状流生成
～Busse の世界
(1970～1980年代)

1970年代～弱非線形論

回転が遅い場合の帯状流生成

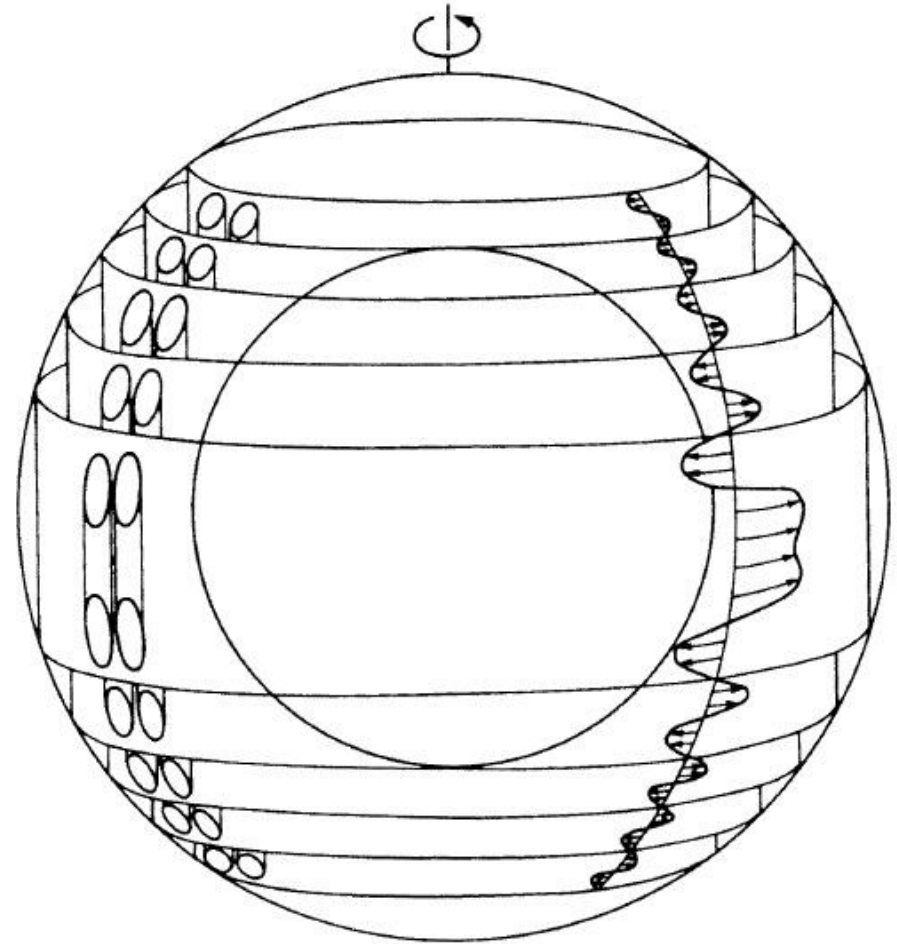
- Busse (1970a, 1973)
 - Sectorial 型の水平構造
 - コリオリ力で水平風が曲げられる
 - 赤道に東向き運動量輸送 → 赤道超回転生成



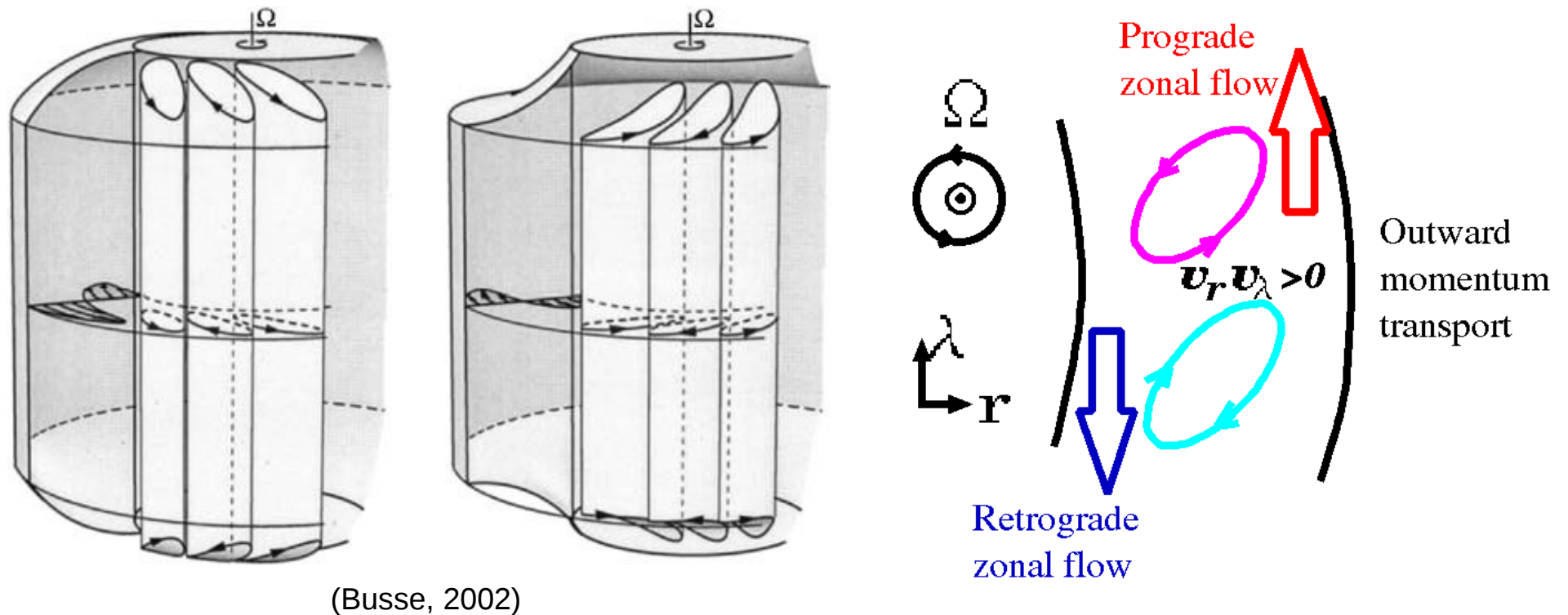
1970年代～弱非線形論

回転が速い場合の帯状流生成

- Busse(1976,1983)
 - レイリー数大
 - ⇒ 対流渦が動径方向に多数並ぶ
 - ⇒ 縞状パターン形成
 - 平均帯状流生成
 - ← 外側球面の曲率
 - ← 対流セルの傾き
 - ← 動径方向へ運動量輸送



平均帯状流生成メカニズム



- 外側境界の曲率 \Rightarrow 対流渦の傾き
 \Rightarrow 内から外への運動量輸送 \Rightarrow 帯状流生成

対流による帯状流生成 弱非線形計算

弱非線形計算とは

- 臨界対流の解を非線形項に代入、その線型応答を求める

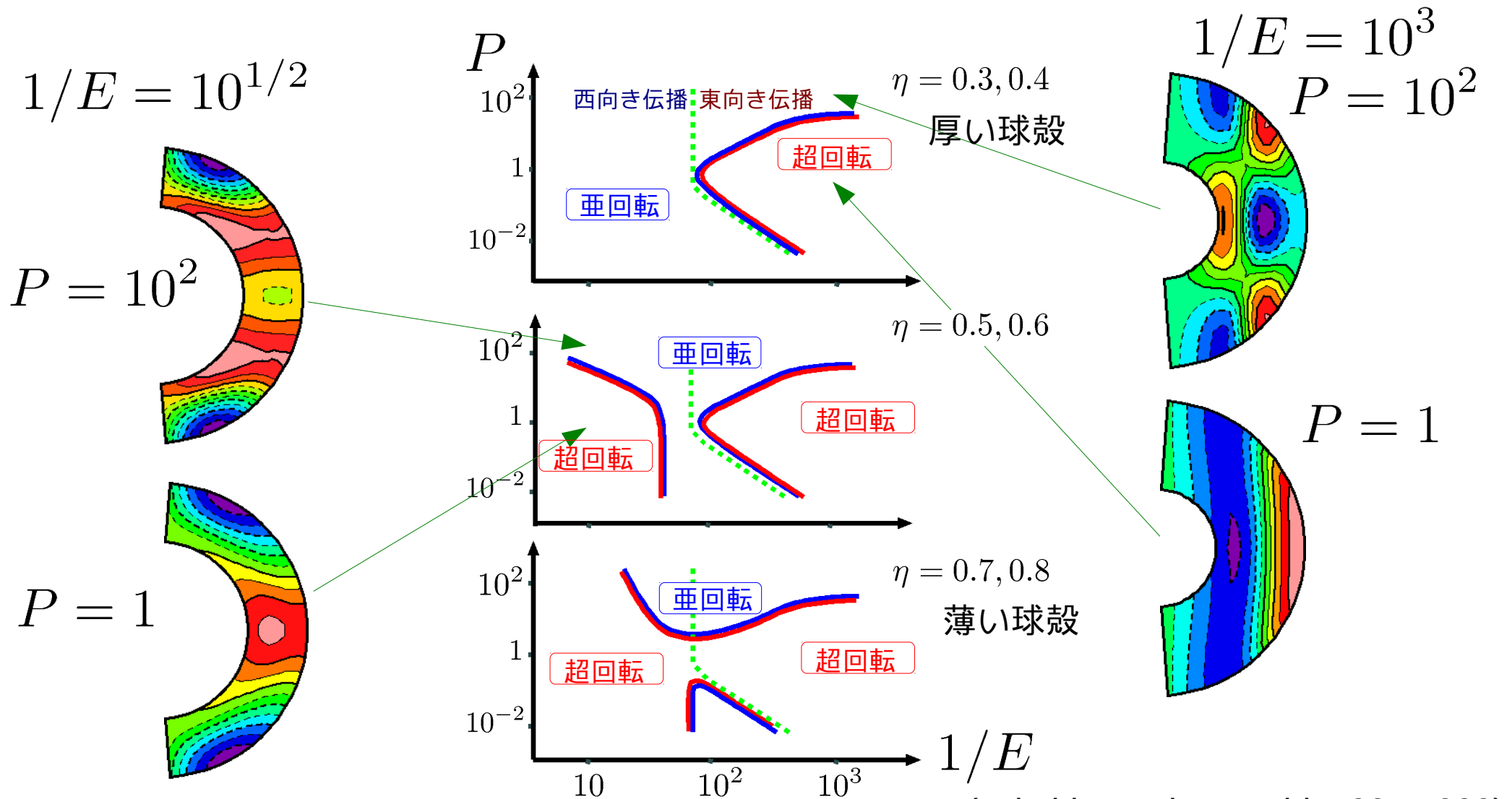
- 元の方程式：
$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + L\boldsymbol{x} + N[\boldsymbol{x}] = 0.$$

- 臨界モード：
$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{(1)}}{\partial t} + L\boldsymbol{x}^{(1)} = 0.$$

- 弱非線形場：
$$\bar{L}\overline{\boldsymbol{x}^{(2)}} = -\overline{N[\boldsymbol{x}^{(1)}]}.$$

帯状流生成～弱非線形計算

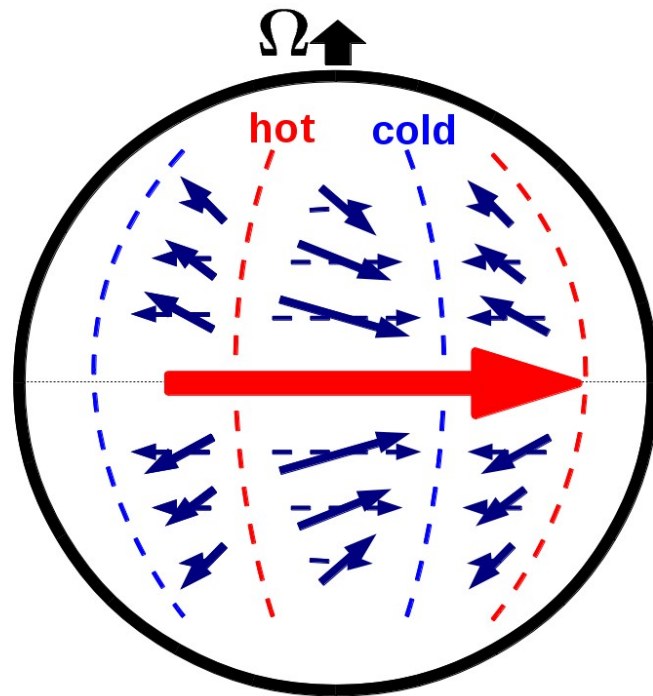
- 赤道上端の流れ : P 小 **prograde**, P 大 **retrograde**



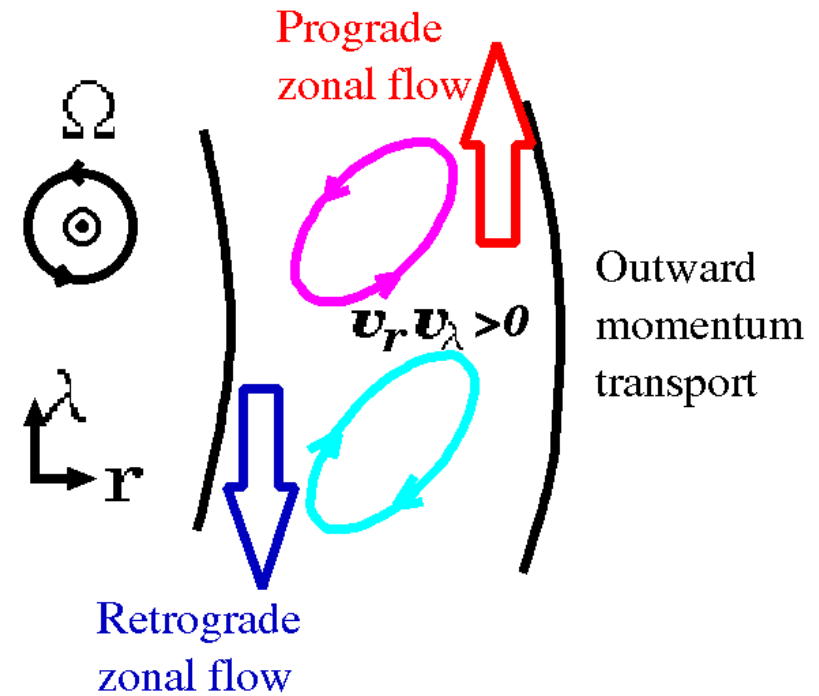
帯状流生成メカニズム (P小)

レイノルズ応力

- 大規模渦のレイノルズ応力 \Rightarrow 赤道超回転生成



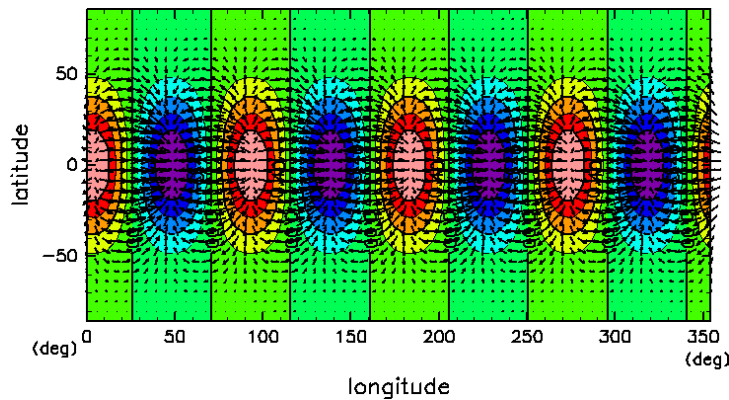
回転小



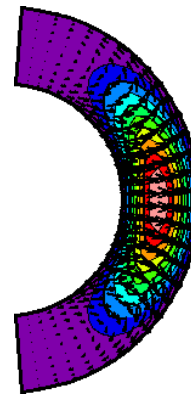
回転大

臨界モードと帯状流 (回転小、P小)

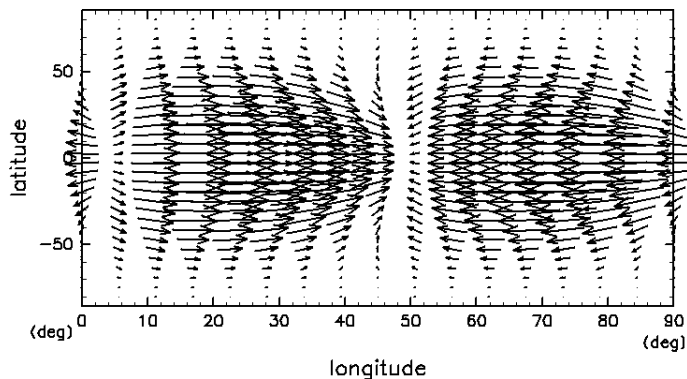
$$E = 10^{-1/2}, P = 1, \eta = 0.6$$



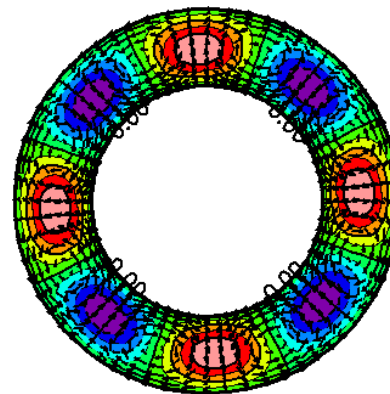
外側境界水平流と中層温度



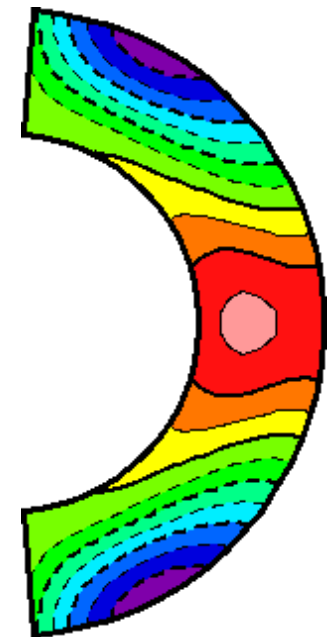
子午面断面



外側境界拡大図



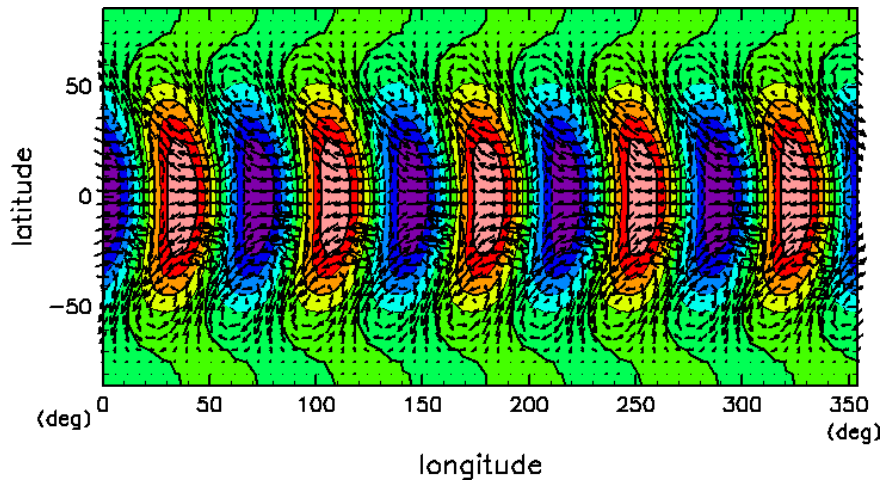
赤道断面



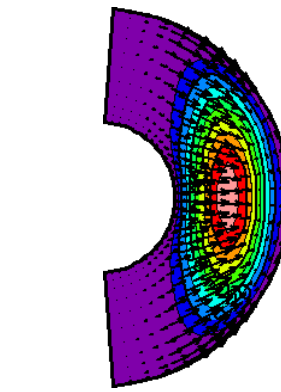
平均帯状流

臨界モードと帯状流 (回転大、P小)

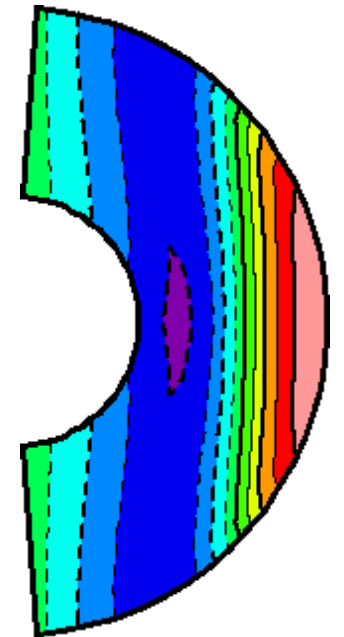
$$E = 10^{-3}, P = 1, \eta = 0.4$$



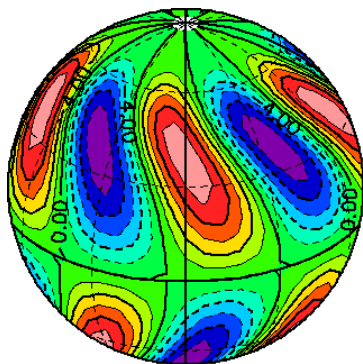
外側境界水平流と中層温度



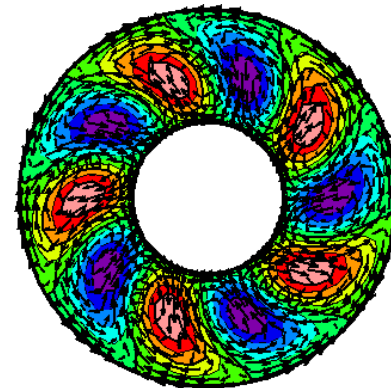
子午面断面



平均帯状流



外側境界トロイダル場



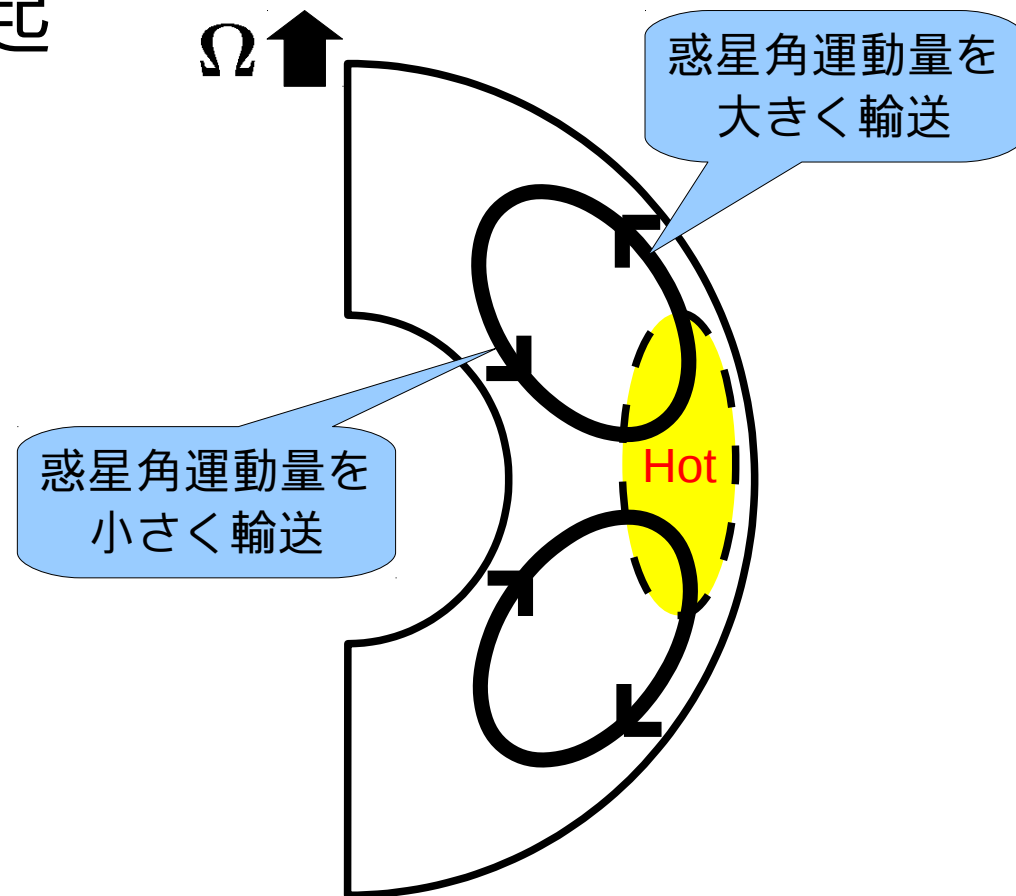
赤道断面

(Takehiro and Hayashi 1995,1999)

帯状流生成メカニズム (P大)

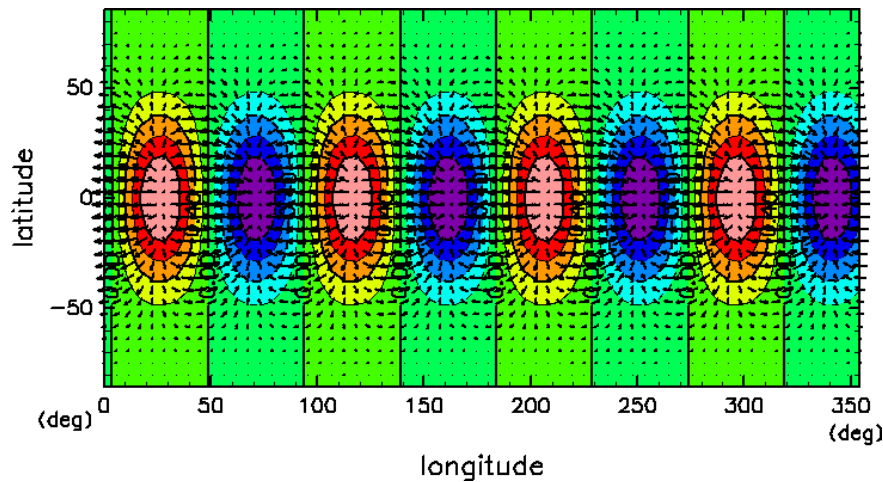
平均子午面循環による角運動量輸送

- 対流による熱輸送
 - ⇒ 平均温度赤道上層で高温, 高緯度で低温
 - ⇒ 平均子午面循環の誘起
 - ⇒ 惑星角運動量の輸送
 - ⇒ 赤道上端で**亜回転**

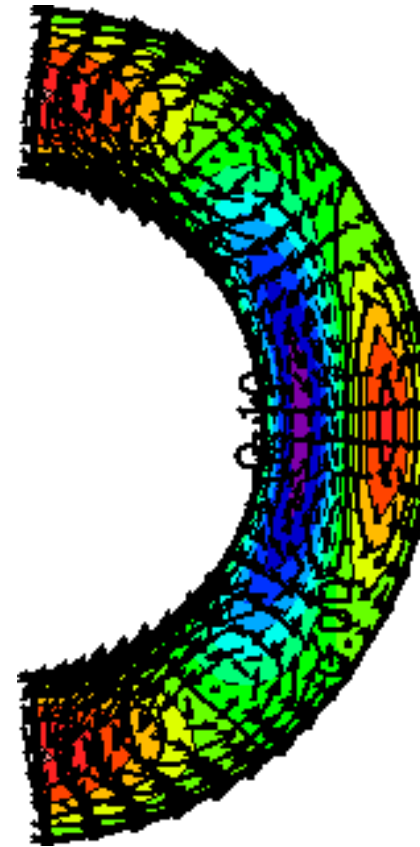


平均温度場と帯状流 (回転小、P大)

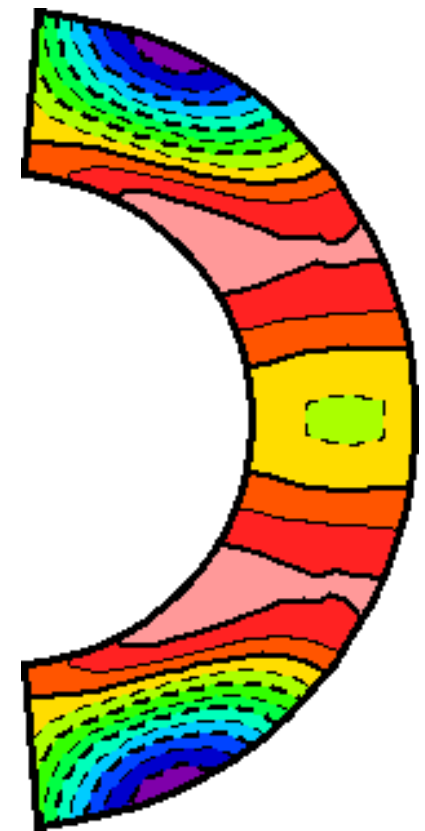
$$E = 10^{-1/2}, P = 10^2, \eta = 0.6$$



臨界モード
外側境界水平流と中層温度場



平均温度場と平均子午面循環



平均帯状流

帯状流生成メカニズム (P大)

温度風バランス

- 地衡流バランス + 浮力

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \alpha g T \mathbf{r} + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

- Rotation をとると

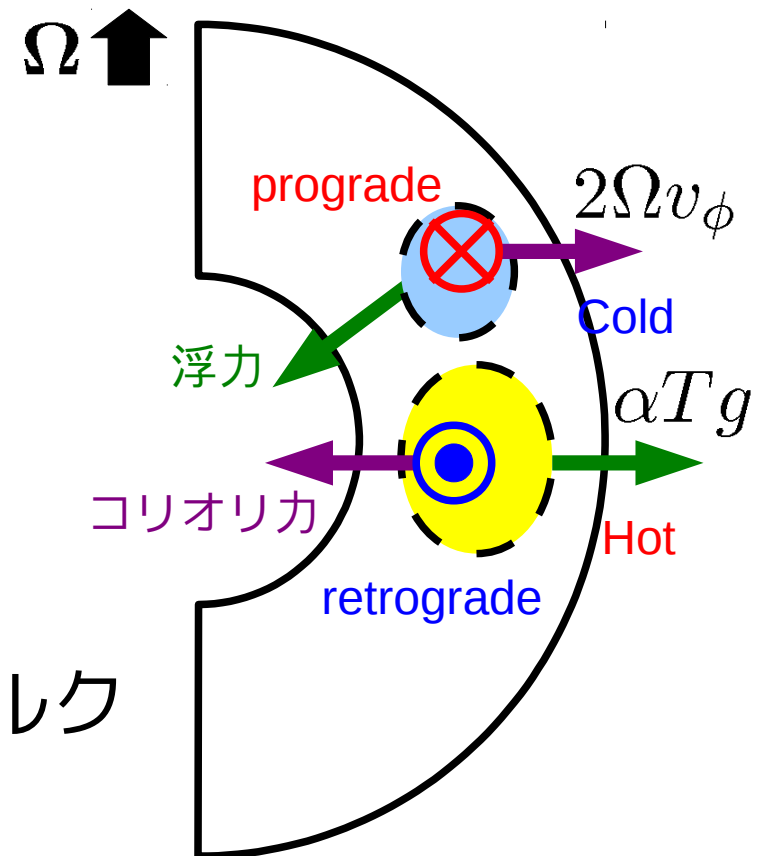
$$-(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \alpha g \nabla T \times \mathbf{r}$$

- 方位角成分をとると

$$2\Omega \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

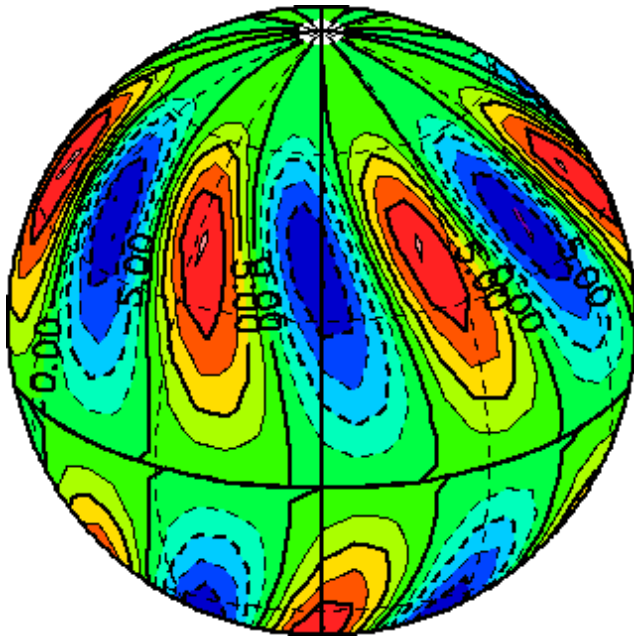
- 温度風バランス：

コリオリカのトルク = 浮力のトルク

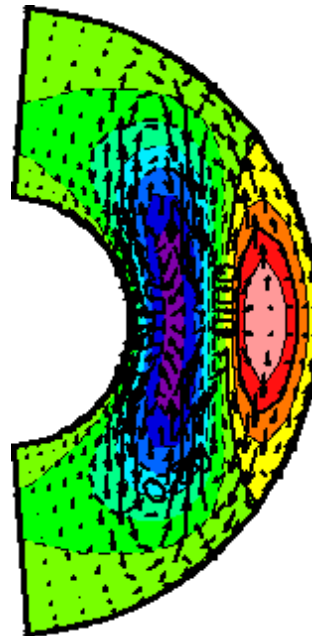


平均温度場と帯状流 (回転大、P大)

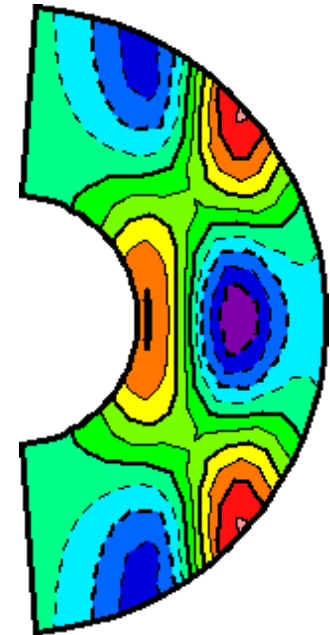
$$E = 10^{-3}, P = 10^2, \eta = 0.4$$



臨界モード
外側境界トロイダル場



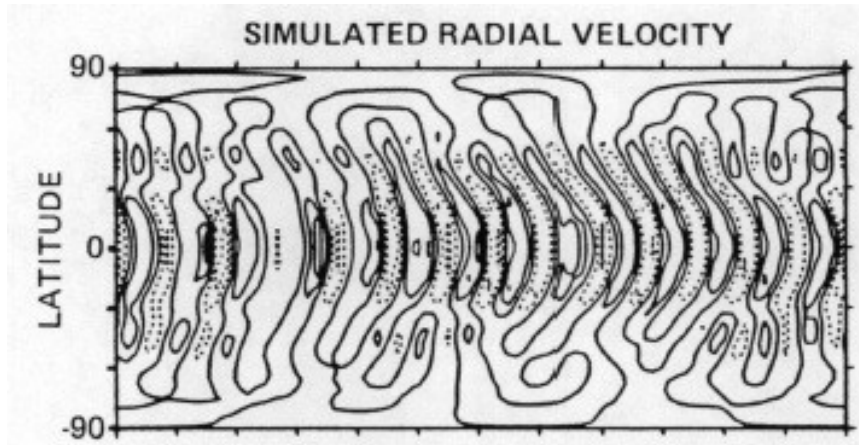
平均温度場と平均子午面循環



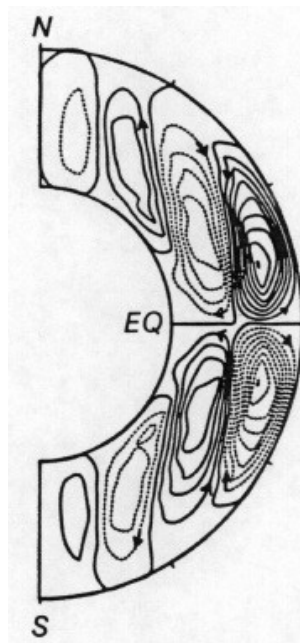
平均帯状流

有限振幅対流の数値計算

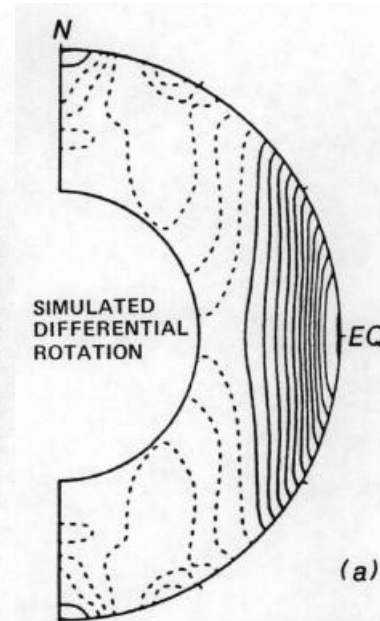
1980年代～数値計算の黎明期



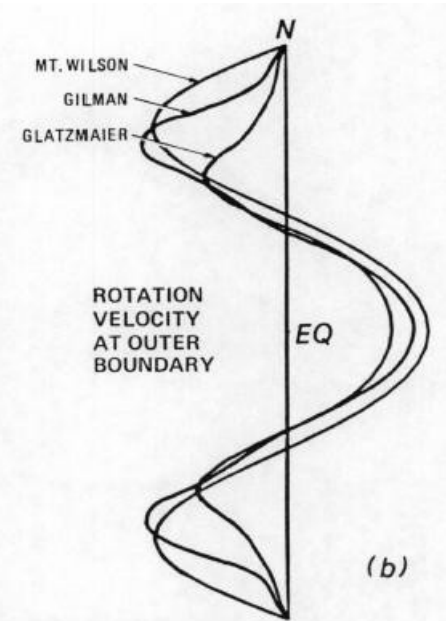
動径速度の水平分布



平均子午面循環



平均帯状流



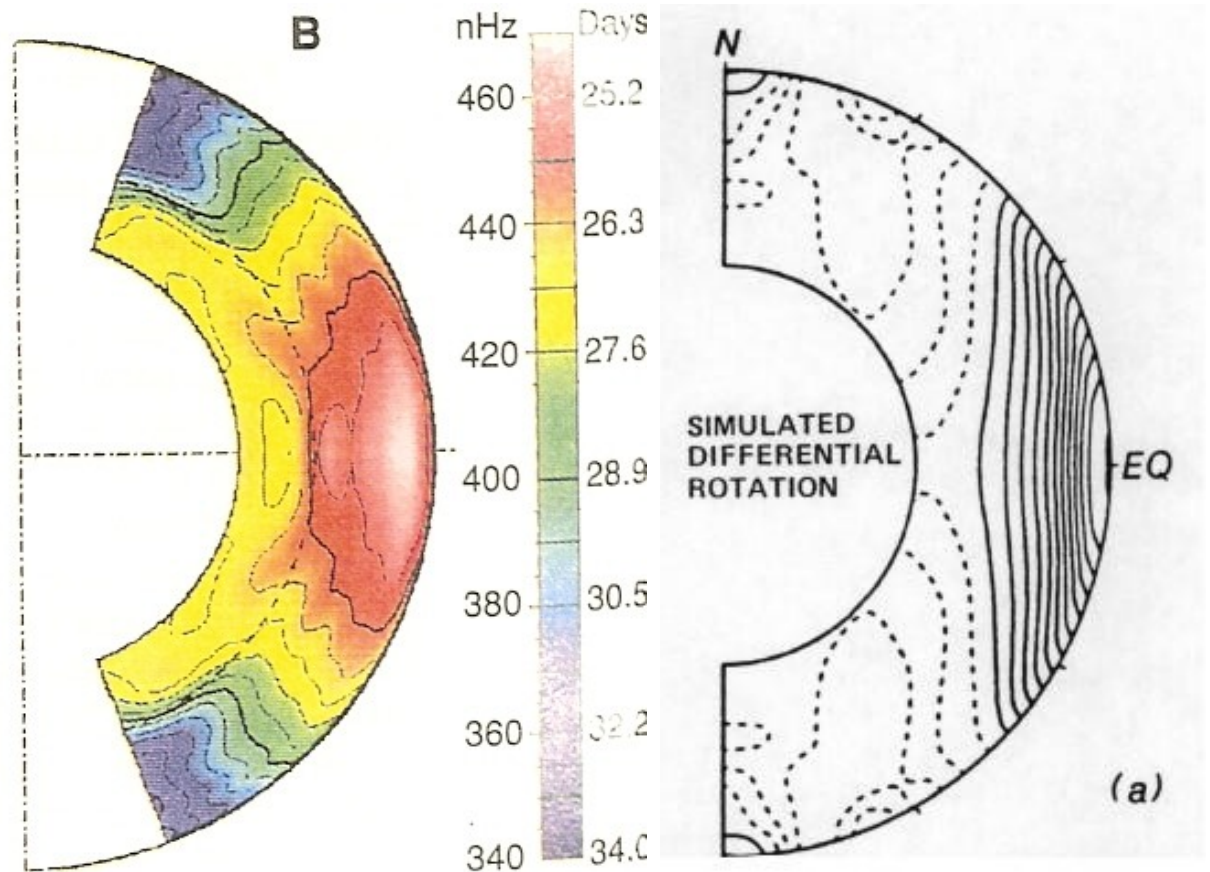
表面東西風分布

- Glatzmaier (1987)

- 太陽対流層の数値シミュレーション(内外のおおきな密度差、磁場の効果)
- 回転軸方向に一様な帯状流分布
- 表面東西風は観測とあっているように見えた、が . . .

1990年代～太陽の内部構造明らかに

- 日震学の発達
⇒ 太陽の内部構造明らかに
- シミュレーション結果と違う！
 - 回転軸方向に一様でない



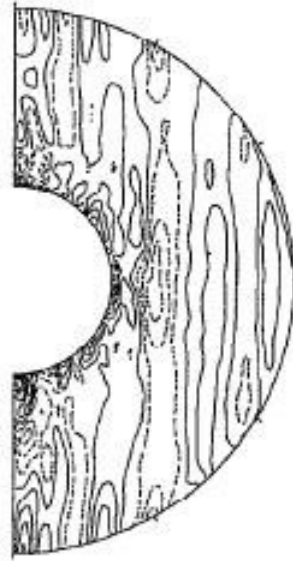
日震学により観測された
回転角速度分布
(Thompson et al., 1996)

Glatzmaier(1987)の
計算結果

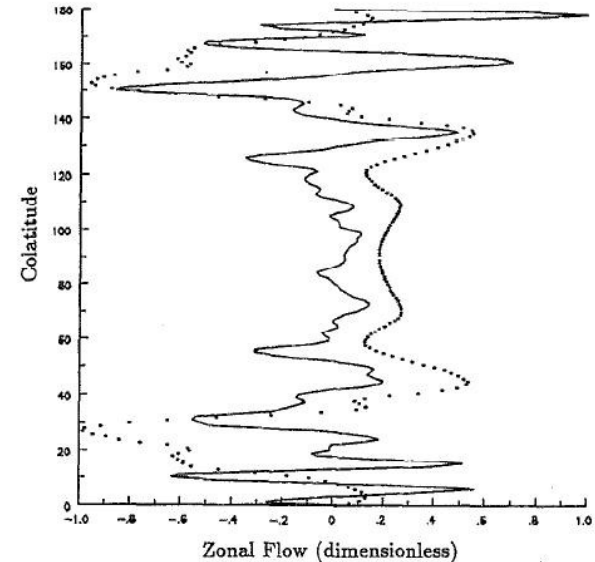
1990年代～本格的な数値計算時代へ



動径速度の赤道面分布



平均帯状流分布

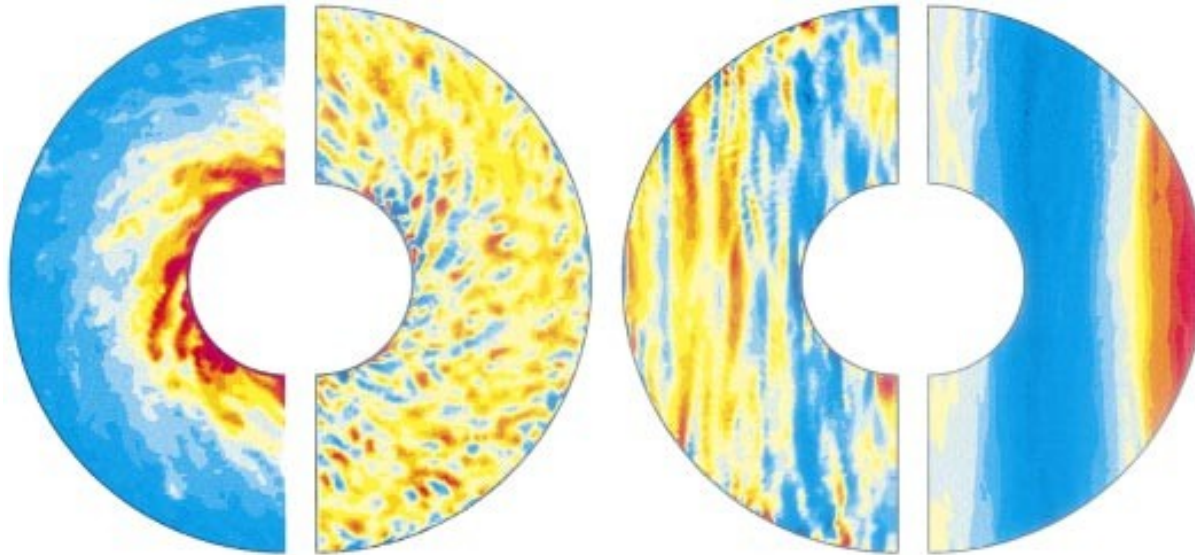


表面帯状流分布

- Sun and Schubert (1995)

- 高解像度・高レイリー数・低エクマン数での有限振幅対流の時間発展数値計算
- 縞状パターンの形成？

2000年代～より大規模な数値計算へ



赤道面温度場

渦度回転軸方向成分
(赤道面, 子午面)

平均帯状流

- Christensen (2002)

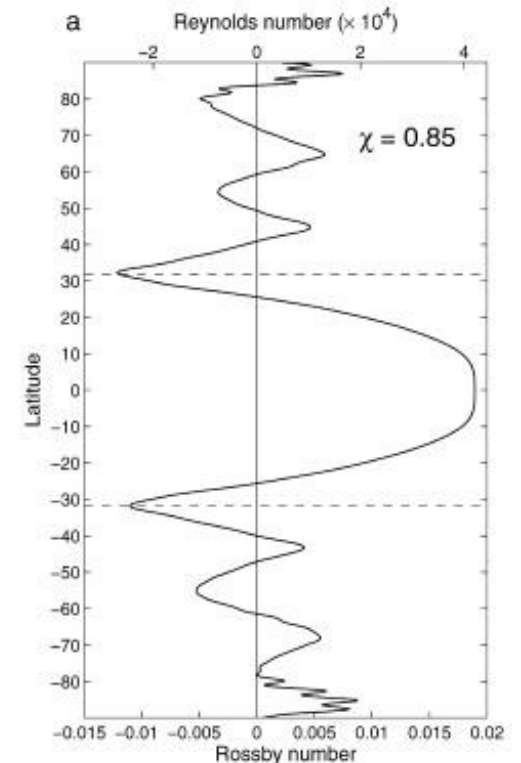
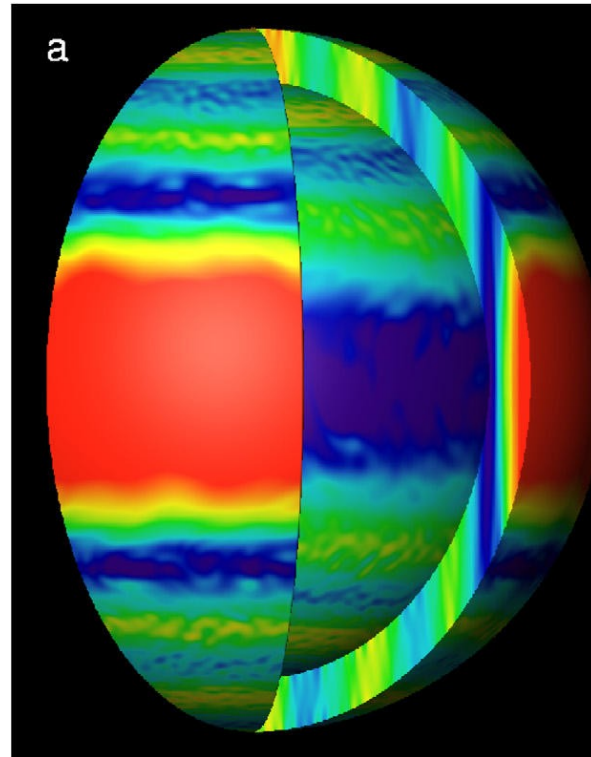
- 系統だった高レイリー数対流の有限振幅計算
- 縞状パターンは生成されない.
- Sun and Schubert (1995) の縞状パターンは偽り. 初期場が残っただけ.
- 赤道で回転と同方向 (赤道加速状態)

木星・土星大気シミュレーション？

- Heimpel and Aurnou (2007)

- 薄い球殻
(1/8セクター計算)
- 超粘性の計算
- 高レイリー計算

帯状流分布



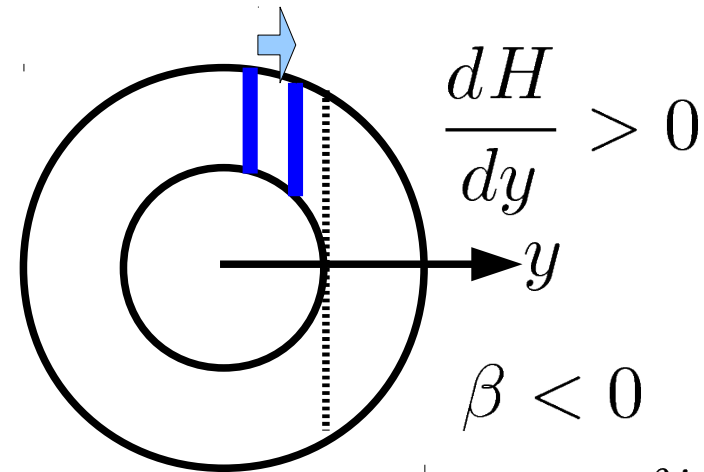
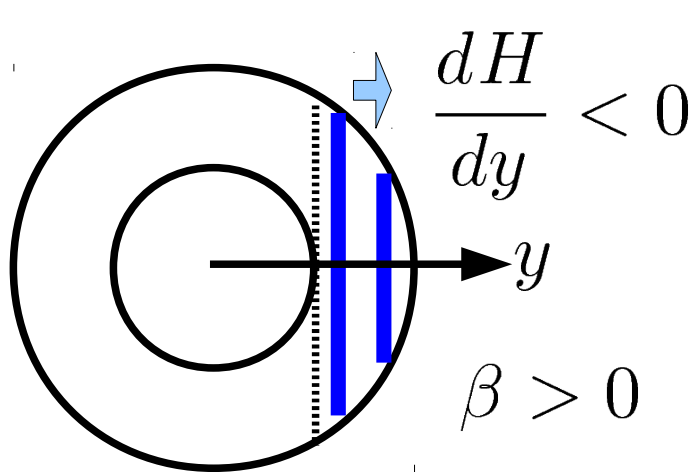
- 赤道付近：強い東向き流れ(赤道加速) ← レイノルズ応力の運動量輸送
- 中高緯度：縞状パターンの形成 ← (地形性) β 面上の2次元乱流

2次元β面乱流問題

- ベータ面モデル (ポテンシャル渦度保存則)

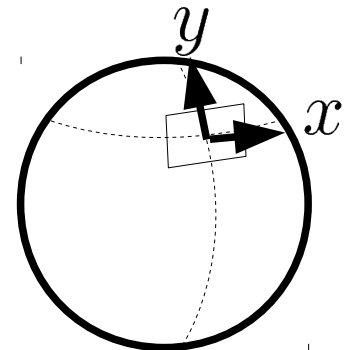
$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F - D,$$

- 回転球殻問題～地形性ベータ効果 $\beta(y) \equiv -\frac{2\Omega}{H} \frac{dH}{dy}$



- cf. 惑星ベータ効果～浅いモデル

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad \beta \equiv \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega}{a} \cos \varphi$$



2次元乱流 ($\beta = 0$)

エネルギーの逆カスケード

- エネルギー・エンストロフィー保存

$$E = \int \hat{E}(k) dk = \text{const.}, \quad Z = \int k^2 \hat{E}(k) dk = \text{const.}$$

- エネルギーの中心波数 $k_e = \frac{\int k \hat{E}(k) dk}{\int \hat{E}(k) dk}$

- スペクトルの広がり $I = \int (k - k_e)^2 \hat{E}(k) dk = Z - k_e^2 E$

- スペクトルが広がると仮定すると

$$\frac{dI}{dt} > 0, \quad \frac{dk_e^2}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{dI}{dt} < 0$$

- 2次元系：エネルギーは低波数側へカスケードする

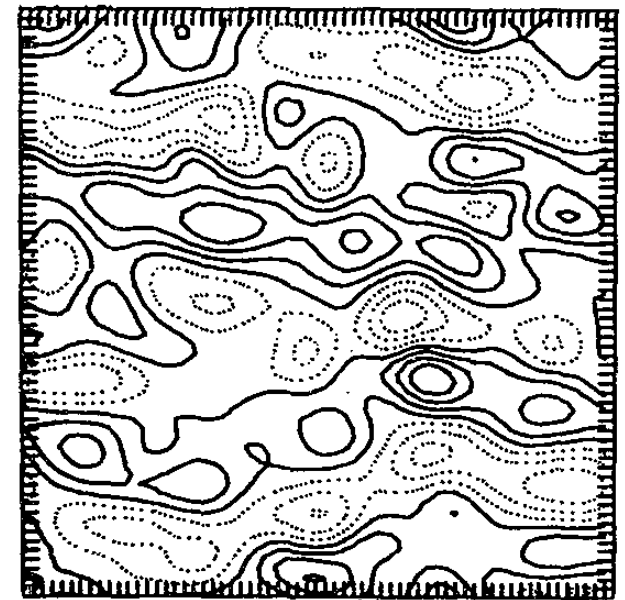
ラインズ効果～帯状構造の出現

- Rhines (1975)
 - 非線形項と線形項が同程度となるスケール(波数)
→ ラインズスケール(波数)

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) \sim \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow L_\beta = \sqrt{\frac{U}{\beta}}$$

U は特徴的な速度スケール

- ラインズスケールで逆カスケード止まる → 帯状構造の出現



(b)

流線関数

帯状構造出現の説明

- β 項のスケーリング：x方向の長さスケールで

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) \sim \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \frac{|\psi|^2}{L^4} \sim \beta \frac{|\psi|}{L_x} \rightarrow \frac{U}{\beta} \sim \frac{L^3}{L_x}$$

L_x 大きければ逆カスケード可能 $\Rightarrow L_x \rightarrow \infty$

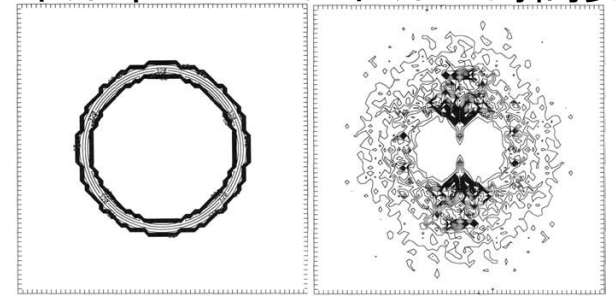
- 波数で表わせば

$$|\mathbf{k}|^4 |\psi|^2 \sim \beta k_x |\psi| \rightarrow |\mathbf{k}_\beta|^2 = \frac{\beta}{U} \cos \phi$$

cf. Vallis and Martlud (1993)

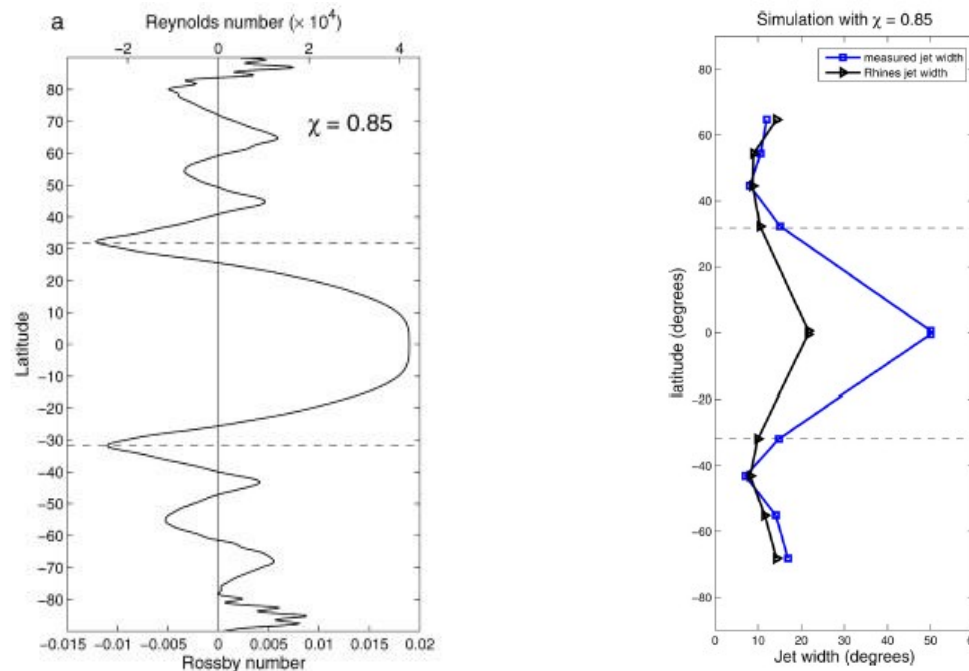
- ダンベル領域を避けて逆カスケード

エネルギースペクトルの時間変化



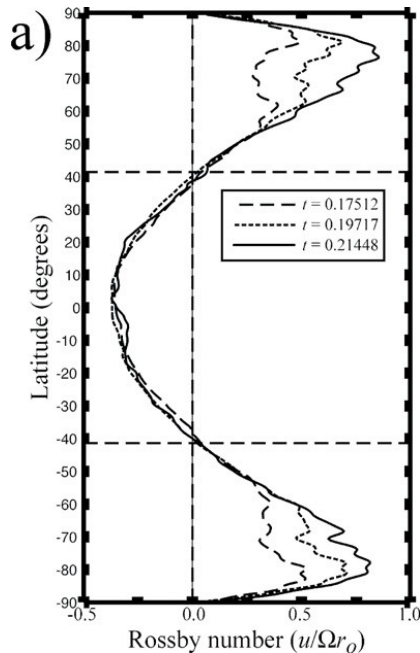
ラインズ効果による 高緯度の縞状構造の説明

- 高緯度：回転系の熱対流
 - ⇒ 2次元的な小スケールの渦生成
 - ⇒ 逆カスケード ⇒ ラインズ効果で帯状構造



ラインズスケールとジェット幅の比較
(Heimpel and Aurnou, 2007)

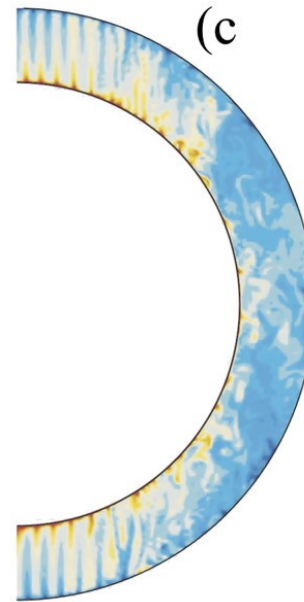
海王星大気シミュレーション？



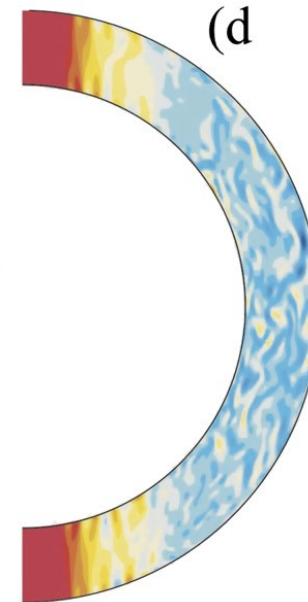
带状流分布



带状流分布



温度分布



渦度回転軸方向成分

- Aurnou et al. (2007)

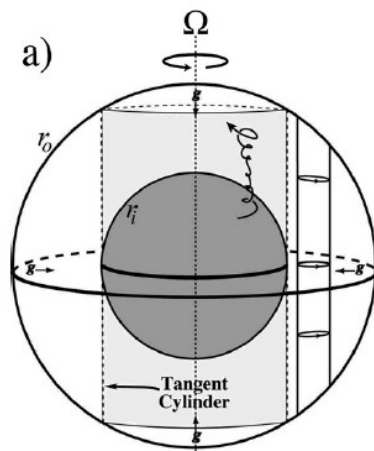
- より高レイリー数計算(1/8セクター計算)
- 超粘性計算
- 流れ場は回転軸方向に一様でない
- 角運動量の混合 ⇒ 赤道で回転と逆方向(赤道加速ではない)

角運動量混合の発生

- 浮力項/コリオリ項の大小で混合の様子が決まる

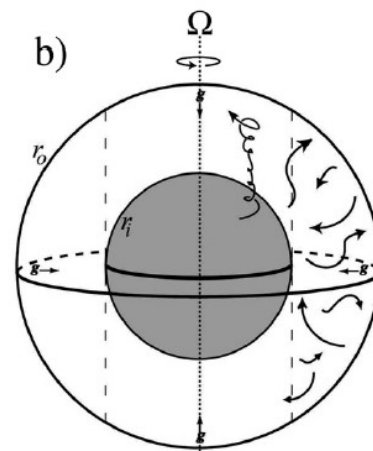
$$\frac{\text{buoyancy}}{\text{Coriolis}} \sim \frac{\alpha g \Delta T}{\Omega u} \sim \frac{\alpha g \Delta T}{\Omega \sqrt{\alpha g \Delta T D}} = \sqrt{\frac{\alpha g \Delta T}{\Omega^2 D}} = \sqrt{Ra^*},$$

$$Ra^* \equiv \frac{\alpha g \Delta T}{\Omega^2 D} = \frac{Ra E^2}{Pr}$$



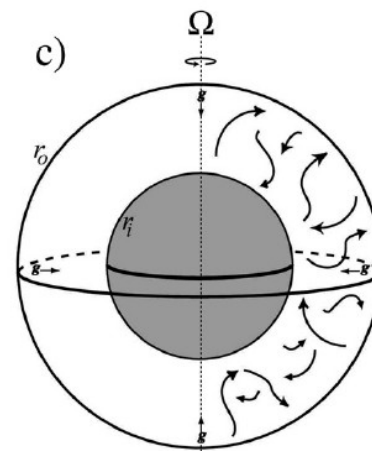
$Ra^* \ll 1$

柱状対流



$Ra^* \sim 1$

接円筒外で混合



$Ra^* \gg 1$

全球殻で混合

(Aurnou et al, 2007;
Gilman, 1977)

角運動量一様化

- とある領域で角運動量が混合・一様化：

$$us + \Omega s^2 = A \text{ (const.)}$$

- 回転系の静止状態からスタート
⇒ 相対角運動量の領域積分が0

$$\int \Omega s^2 dV = A \int dV = V, \quad A = \bar{M}_p = \frac{1}{V} \int \Omega s^2 dV.$$

- 帯状速度分布：

$$u = \frac{\bar{M}_p}{s} - \Omega s = \frac{\bar{M}_p}{r \cos \varphi} - \Omega r \cos \varphi,$$

平均惑星角運動量の計算

- 全球殻平均

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_o^3 - r_i^3),$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_p &= \frac{1}{V} 2\pi \int_{r_i}^{r_o} dr r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \Omega r^2 \cos^2 \varphi \\ &= \frac{4\pi\Omega}{V} \int_{r_i}^{r_o} r^5 dr \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4\pi\Omega}{V} \frac{r_o^5 - r_i^5}{5} \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{5} \Omega \frac{r_o^5 - r_i^5}{r_o^3 - r_i^3} = \Omega r_o^2 \frac{2}{5} \frac{1 - \eta^5}{1 - \eta^3}.\end{aligned}$$

平均惑星角運動量の計算

- 接円筒外側平均

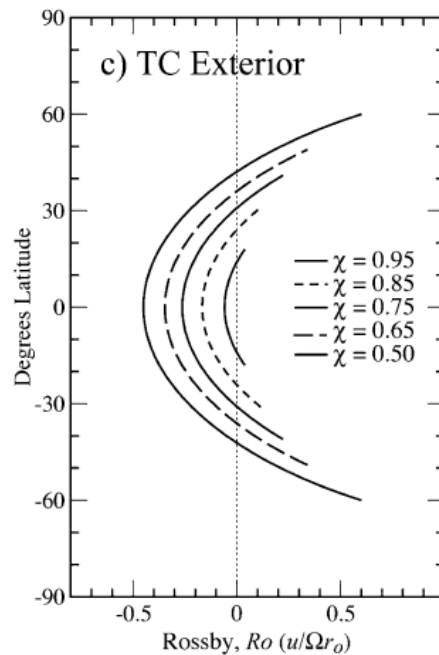
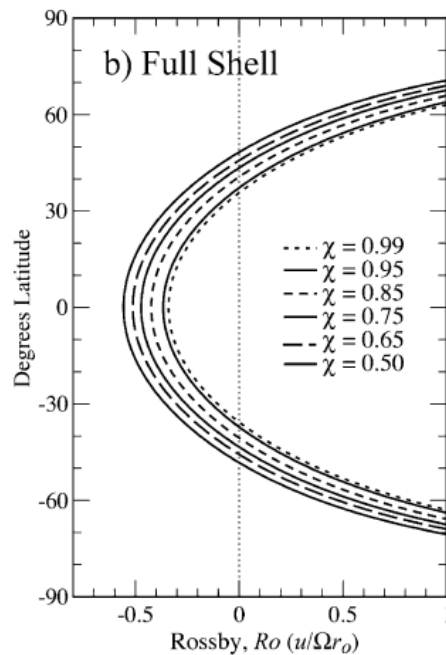
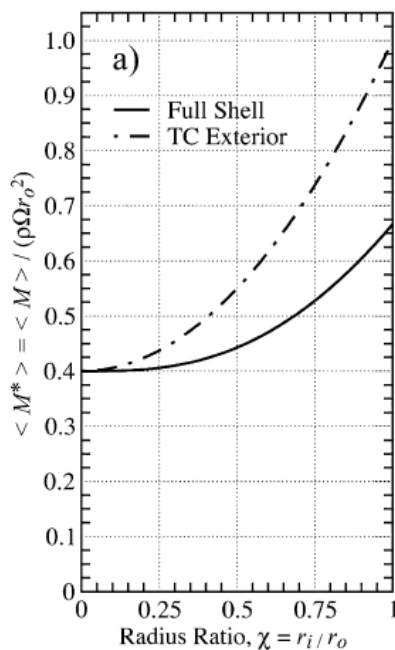
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{r_i}^{r_o} s ds \int_{-\sqrt{r_o^2 - s^2}}^{\sqrt{r_o^2 - s^2}} dz = 4\pi r_o^3 \int_{\eta}^1 ds s \sqrt{1 - s^2} \\ &= 4\pi r_o^3 \int_0^{\varphi_0} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4\pi r_o^3 \int_0^{t_0} t^2 dt \\ &= \frac{4}{3} \pi r_o^3 \sin^3 \varphi_0 = \frac{4}{3} \pi r_o^3 (1 - \eta^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_p &= \frac{4\pi}{V} \int_{r_i}^{r_o} s \sqrt{r_o^2 - s^2} \Omega s^2 ds = \frac{4\pi r_o^5 \Omega}{V} \int_{\eta}^1 s^3 \sqrt{1 - s^2} ds \\ &= \frac{4\pi r_o^5 \Omega}{V} \int_0^{\varphi_0} d\varphi \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{4\pi r_o^5 \Omega}{V} \int_0^{t_0} t^2 (1 - t^2) dt \\ &= \frac{4\pi r_o^5 \Omega}{V} \left(\frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^5}{5} \right) = \Omega r_o^2 \left[1 - \frac{3}{5} (1 - \eta^2) \right]. \end{aligned}$$

角運動量一様分布

- 全球殻で一様化： $\bar{M}_p = \Omega r_o^2 \frac{2}{5} \left(\frac{1 - \eta^5}{1 - \eta^3} \right)$

- 接円筒外側で一様化： $\bar{M}_p = \Omega r_o^2 \left[1 - \frac{3}{5}(1 - \eta^2) \right]$



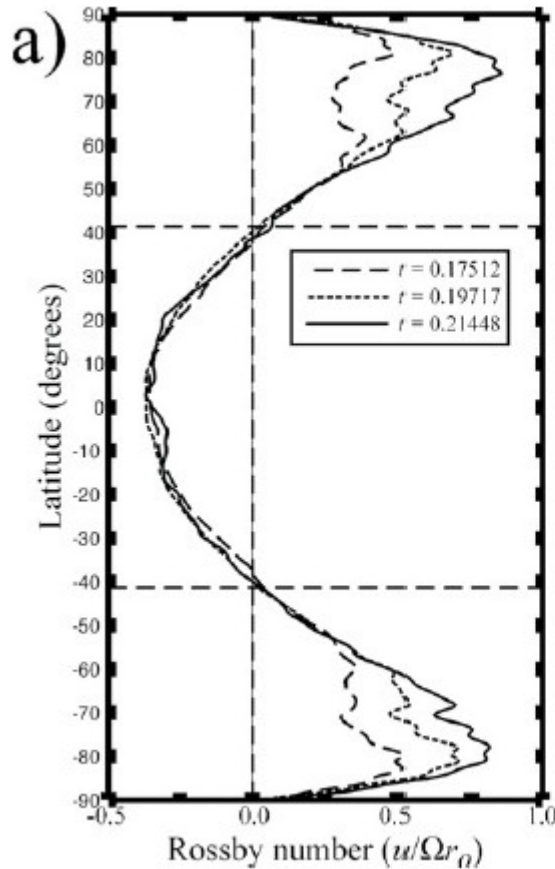
全球殻で一様化

接円筒外側で一様化

(Aurnou et al., 2007)

角運動量一様分布との比較

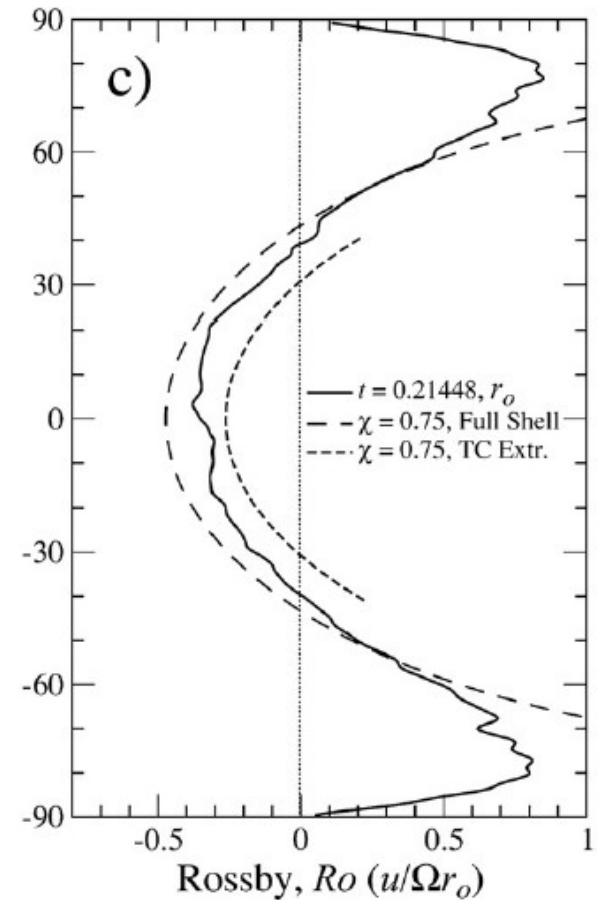
- 数値計算と理論の比較 (Aurnou et al, 2007)



带状流分布



带状流分布

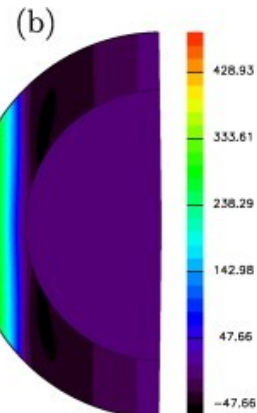
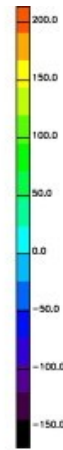
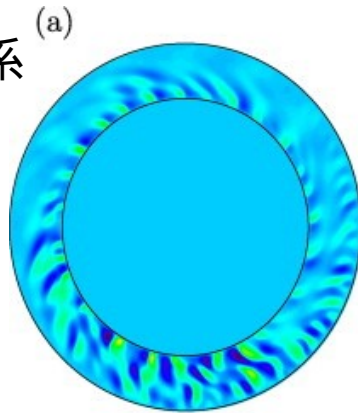


带状流分布 (理論と計算)

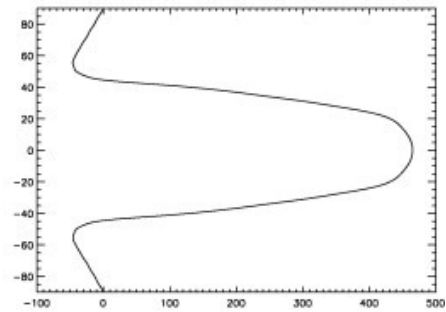
現在～非弾性系への拡張

- Jones and Kuzanyan (2009)

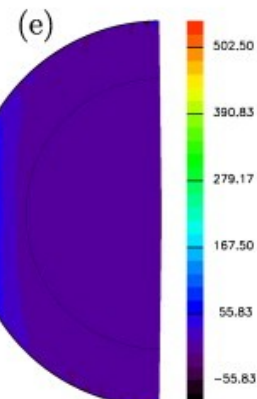
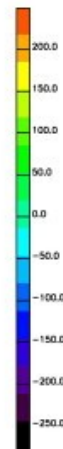
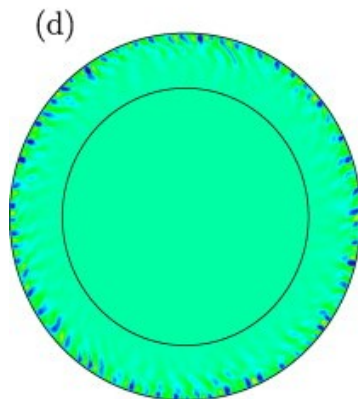
ブシネスク系 (a)



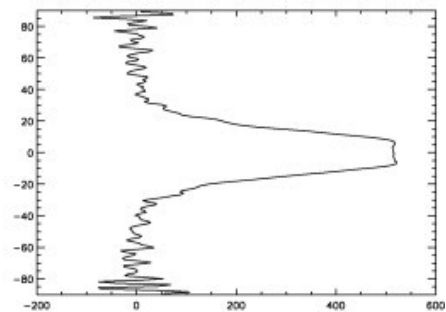
(c)



非弾性系



(f)



動径速度

帯状流

帯状流

非弾性系での対流発生場所

- 非弾性系 → 外側境界付近に対流発生

- 基本場エントロピーの式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \rho \kappa T \frac{dS}{dr} = 0,$$

拡散係数 $\rho(r)\kappa$ が外側ほど小さい

→ 基本場の温度分布が外側ほど勾配大

→ 外側で不安定性大

まとめ

- 回転球殻対流と平均帯状流生成
 - パラメーターにより様々な臨界対流パターンの出現
柱状・螺旋状・赤道壁面モード, 渦の伝播方向の変化
 - **ロスビー波 (地形性 β 効果, ポテンシャル渦度保存)** の性質による解釈
 - プラントル数により帯状流生成メカニズムが変わる
 - プラントル数小：**レイノルズ応力**
 - プラントル数大：**平均子午面循環, 温度風**
 - 薄い球殻での有限振幅対流
⇒ガス・氷惑星の帯状流を説明できる？
 - レイリー数中間的：赤道で超回転, 高緯度で**ラインズ効果**の縞々
 - レイリー数大：**角運動量混合**で赤道亜回転

おまけ

- 現実のパラメーターからはほど遠いことに注意
 - 計算できている≠現象を再現できている
 - メカニズムの多様性を調べて知見を増やす
- プラントル数：帯状流生成のキーパラメータ
 - 熱と運動量の乱流輸送の相対強度
⇒ 帯状流生成メカニズムへの示唆

参考文献その1

- Aurnou, J., Heimpel, M., Wicht, J., 2007 : The effects of vigorous mixing in a convective model of zonal flow on the ice giants. *Icarus*, 190, 110—126
- Busse, F. H., 1970 : Differential rotation in stellar convection zones. *Astrophys. J.*, 159, 629--639
- Busse, F. H., 1970 : Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, 44, 441--460
- Busse, F. H., 1973 : Differential rotation in stellar convection zones. II. *Astron. Astrophys.*, 28, 27—37
- Busse, F. H., 1976 : A simple model of convection in the Jovian atmosphere. *Icarus*, 29, 255—260
- Busse, F. H., 1986: Asymptotic theory of convection in a rotating, cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.*, 173, 545--56.
- Busse, F. H., 1983 : A model of mean zonal flows in the major planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 23, 153--174
- Busse, F. H., 2002 : Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Phys. Fluids*, 14, 1301--1314.
- Christensen, U.R., 2002 : Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 470, 115—133.
- E. Dormy, Soward, A. M., Jones, C. A., Jault, D., Cardin, P., 2003: The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 501, 43--70.
- Glatzmaier, G. A., 1987 : A review of what numerical simulations tell us about the internal rotation of the Sun. in *The Internal Solar Angular Velocity*, eds by Durney B. R., Sofia, S., *Astrophysics and Space Science Library*, 137, 263--274
- Gilman, P. A., 1977 : Nonlinear dynamics of Boussinesq convection in a deep rotating spherical shell - I. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 8, 93--135.
- Guillot, T., Stevenson, D. J., Hubbard, W. B., Saumon, D., 2004: The interior of Jupiter. in "Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere", edited by Bagenal, F., Dowling, T., McKinnon, W. Cambridge University Press.
- Heimpel, M., Aurnou, J., 2007 : Turbulent convection in rapidly rotating spherical shells: A model for equatorial and high latitude jets on Jupiter and Saturn. *Icarus*, 187, 540—557
- Jones, C. A., Soward, A. M., Mussa, A. I., 2000: The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, 405, 157--179.
- Jones, C. A., Kuzanyan, K. M., 2009 : Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets. *Icarus* , 204, 227--238.
- Ossendrijver, M., 2003 : The solar dynamo. *Astron. Astrophys. Rev.*, 11, 287--367
- Pirraglia, J. A., 1984 : Meridional energy balance of Jupiter. *Icarus*, 59, 169--76.
- Rhines, R. B., 1975 : Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, 69, 417--443.

参考文献その2

- Schubert G., Turcotte, D. L., Olson, P., 2001: Mantle convection in the Earth and planets. Cambridge Univ. Press, 940pp.
- Sukoriansky, S., Galperin, B., Dikovskaya, N., 2002 : Universal spectrum of two-dimensional turbulence on a rotating sphere and some basic features of atmospheric circulation on giant planets. Phys. Rev. Lett., 89, 124501-1--4.
- Sun, Z.-P., Schubert, G., 1995 : Numerical simulations of thermal convection in a rotating spherical fluid shell at high Taylor and Rayleigh numbers. Phys. Fluids, 7, 2686—2699.
- Takehiro, S., Hayashi, Y.-Y., 1995: Boussinesq convection in rotating spherical shells -- a study on the equatorial superrotation. in The Earth's Central Part: Its Structure and Dynamics, edited by Yukutake, T., 123--156
- Takehiro, S., Hayashi, Y.-Y., 1999 : Mean zonal flows excited by critical thermal convection in rotating spherical shells. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 90, 43--77.
- Takehiro, S., 2008 : Physical interpretation of spiralling-columnar convection in a rapidly rotating annulus with radial propagation properties of Rossby waves. J. Fluid Mech., 614, 67--86.
- Takehiro, S., 2010 : On the retrograde propagation of critical thermal convection in a slowly rotating spherical shell. J. Fluid Mech., 659, 505—515.
- Takehiro, S., 2010 : Kinetic energy budget analysis of spiraling columnar critical convection in a rapidly rotating spherical shell. Fluid Dyn. Res. 42, 055501.
- Thompson, M. J., et al., 1996 : Differential rotation and dynamics of the solar interior. Science, 272, 1300--1305
- Vallis, G. K., Maltrud, M. E., 1993 : Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. J. Phys. Oceanogr., 23, 1346--1362.
- Zhang, K.-K., Busse, F.H., 1987 : On the onset of convection in rotating spherical shells. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 39, 119--147
- Zhang, K., 1992 : Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. J. Fluid Mech., 236, 535—556
- 柴田一成, 大山真満, 2004 : 写真集 太陽 -- 身近な恒星の最新像 -- 裳華房, 87pp.
- 竹広真一, 入江正憲, 2001: 高速回転円筒中の 2次元らせん状対流とロスビー波の力学. ながれマルチメディア,
http://www2.nagare.or.jp/mm/2001/takehiro/index_ja.htm
- Newton 別冊太陽系全カタログ, 2000, ニュートンプレス
- Newton 別冊地球のしくみと進化の歴史, 2004, ニュートンプレス
- Welcome to the planets, NASA, <http://pds.jpl.nasa.gov/planets/>