

# 高次高階のルジャンドル陪函数の計算

\* 榎本剛（京大防災研）

\*enomoto.takeshi.3n@kyoto-u.ac.jp

2016/2/11

科研費挑戦的萌芽研究 15K13417

Enomoto, T., 2015: Comparison of computational methods of associated Legendre functions. *SOLA*, **11**, 144–149, doi:10.2151/sola.2015-033..

## 高次高階ルジャンドル陪函数

- 最初の試み: 地球シミュレータ上 AFES T1279 (2002, Ohfuchi et al. 2004)
- 数値予報モデル:
  - JMA GSM TL959 (2007年にTL319から)
  - ECMWF IFS TL1279 (2010年にTL799から)
  - NCEP GSM TL1534 (2015年にT574から)
- 非静力学モデル: ECMWF IFS TL7999 (Wedi et al. 2013)

## 球面調和函数

$$Y_n^m(\lambda, \theta) = \tilde{P}_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda} \quad (1)$$

ここで階数  $m$ : 東西波数, 次数  $n$ : 全波数,  $\lambda$ : 経度,  $\theta$ : 余緯度,  
 $\tilde{P}_n^m(\cos \theta)$ : 正規化されたルジャンドル陪函数

ルジャンドル陪函数を Rodrigues の式

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n \quad (2)$$

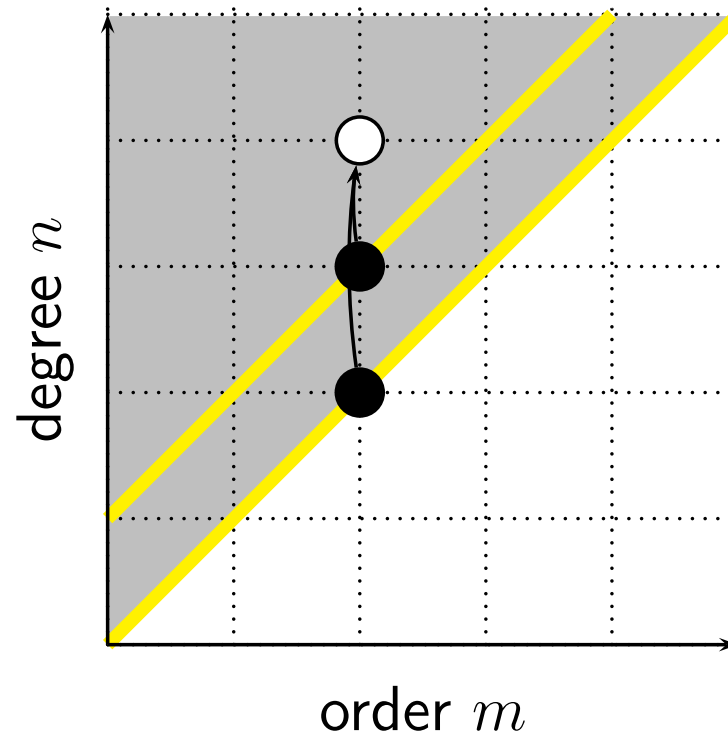
ここで  $x = \cos \theta$

## 正規化

$$\tilde{P}_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 [\tilde{P}_n^m(\cos \theta)]^2 d \cos \theta = 1. \quad (4)$$

# ルジャンドル陪函数を求める3点漸化式



### 3点漸化式

$$\tilde{P}_n^m(\cos \theta) = (a_n^m \cos \theta) \tilde{P}_{n-1}^m(\cos \theta) - b_n^m \tilde{P}_{n-2}^m(\cos \theta) \quad (5)$$

ここで

$$a_n^m = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}, b_n^m = \frac{a_n^m}{a_{n-1}^m}. \quad (6)$$

## 扇形ルジャンドル陪函数

$$\tilde{P}_m^m(\cos \theta) = (d_n^m \sin \theta) \tilde{P}_{m-1}^{m-1}(\cos \theta), \quad (7)$$

ここで

$$d_n^m = \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}. \quad (8)$$

$$\tilde{P}_0^0(\cos \theta) = 1/\sqrt{2} \quad (1 \text{ に正規化})$$

$\sin \theta$  は極付近でアンダーフローを起こす可能性

## 逆変換–順変換テスト

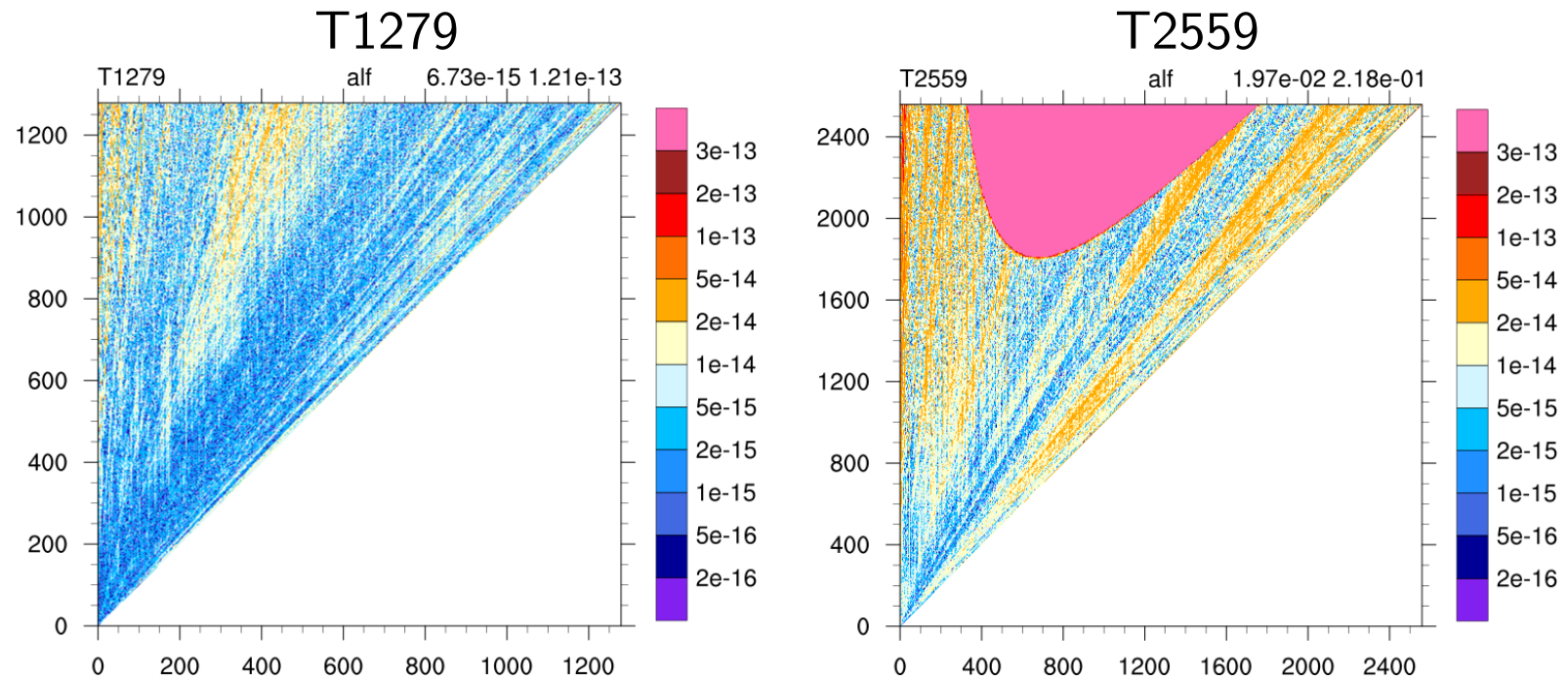
逆変換に続いて順変換を行い，誤差を

$$e_{sa} = \left| 1 - 2 \sum_{j=1}^{J/2} \left[ \tilde{P}_n^m(\cos \theta_j) \right]^2 w_j \right| \quad (9)$$

と定義する。ここで  $\tilde{P}_n^m(\cos \theta)$  は1に正規化.



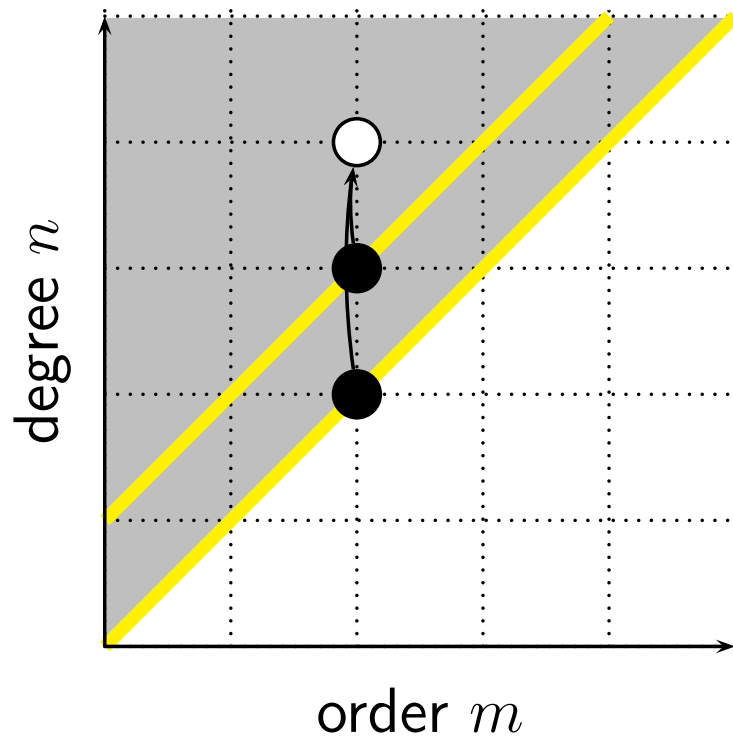
## 逆変換-順変換テスト



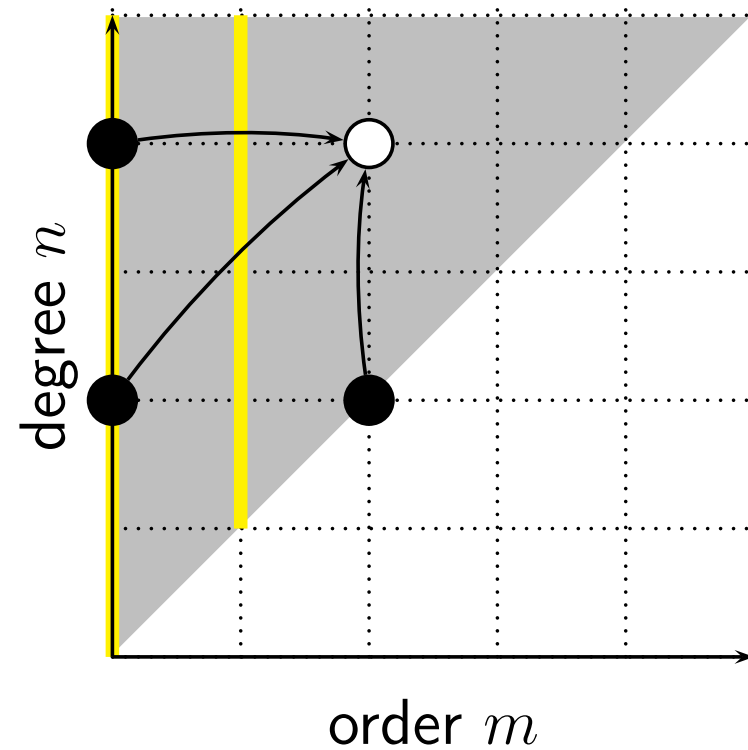
$$e_{sa} = \left| 1 - 2 \sum_{j=1}^{J/2} \left[ \tilde{P}_n^m(\cos \theta_j) \right]^2 w_j \right|$$

# ルジャンドル陪函数を求める漸化式

(3点)



(4点)



## 4点漸化式

Belousov (1962), Nehr Korn (1990), Swarztrauber (1993)

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_n^m(\cos \theta) = & \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-3)(n+m-2)}{(2n-3)(n+m-1)(n+m)}} \tilde{P}_{n-2}^{m-2}(\cos \theta) \\
 & - \sqrt{\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+m-1)(n+m)}} \tilde{P}_n^{m-2}(\cos \theta) \\
 & + \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m-1)(n-m)}{(2n-3)(n+m-1)(n+m)}} \tilde{P}_{n-2}^m(\cos \theta). \quad (10)
 \end{aligned}$$

はアンダーフローを回避 (Enomoto et al. 2008; Wedi et al. 2013)

## フーリエ展開

Hobson (1931)

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n(\cos \theta) = & \sqrt{\frac{2n+1}{2}} 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \left[ \cos n\theta \right. \\
& + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta \\
& + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta \\
& \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)\theta + \cdots \right].
\end{aligned}
\tag{11}$$

$$\tilde{P}_n^1(\cos \theta) = -[n(n+1)]^{-1/2} d\tilde{P}_n^0(\cos \theta)/d\theta \quad (\text{Belousov 1962}).$$

## 倍率因子

$\cos n\theta$  の係数

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}}. \quad (12)$$

Swarztrauber (2002) は  $a_{n,n}$  を次の式から計算

$$a_{n,n} = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}} a_{n-1,n-1}. \quad (13)$$

$$a_{1,1} = \sqrt{3/2} \quad (1 \text{ に正規化})$$

## フーリエ係数に対する漸化式

$a_{n,n}$  を求めた後 ,  $a_{n,k}$  は次の漸化式を逆に辿って計算

$$l(2n - l + 1)a_{n,n-l} - (l - 1)(2n - l + 2)a_{n,n-l+2} \quad (14)$$

ここで , 偶数の  $n$  に対して  $l = n - k$  and  $l = 2, 4, \dots, n$  , 奇数の  $n$  に対して  $l = 2, 4, \dots, n - 1$  (Swarztrauber 2002).

## 拡張浮動小数点数 (X-number)

Smith et al. (1981) Fukushima (2011)

$$X = xB^i \quad (15)$$

ここで 倍精度では  $B = 2^{960}$  , 4倍精度では  $B = 2^{1600}$

$X$  が

$$1/\sqrt{B} \leq |x| < \sqrt{B} \quad (16)$$

であるとき正規数という。

$$1/B \leq |x| < B. \quad (17)$$

であるときを弱正規数と呼び , 正規化を施す。

## 数値実験

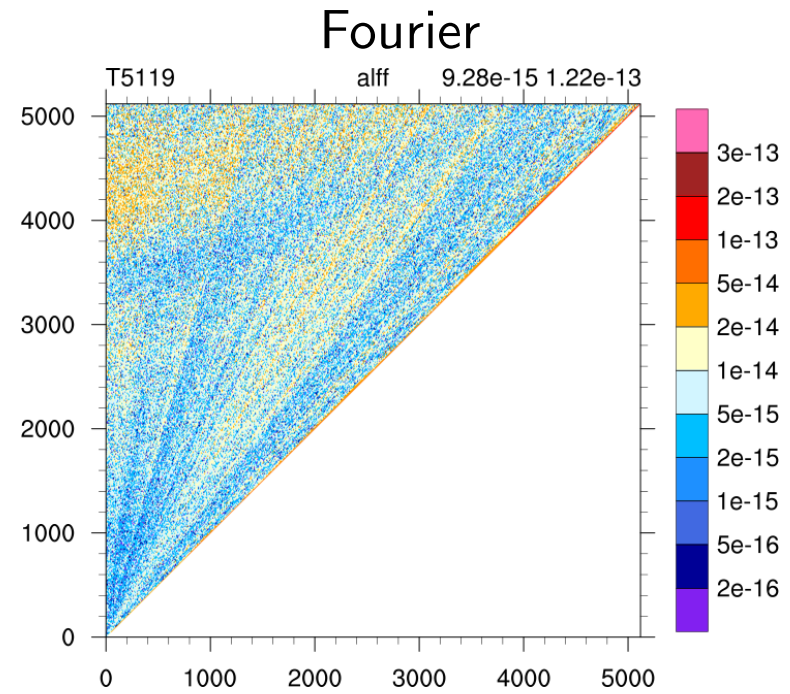
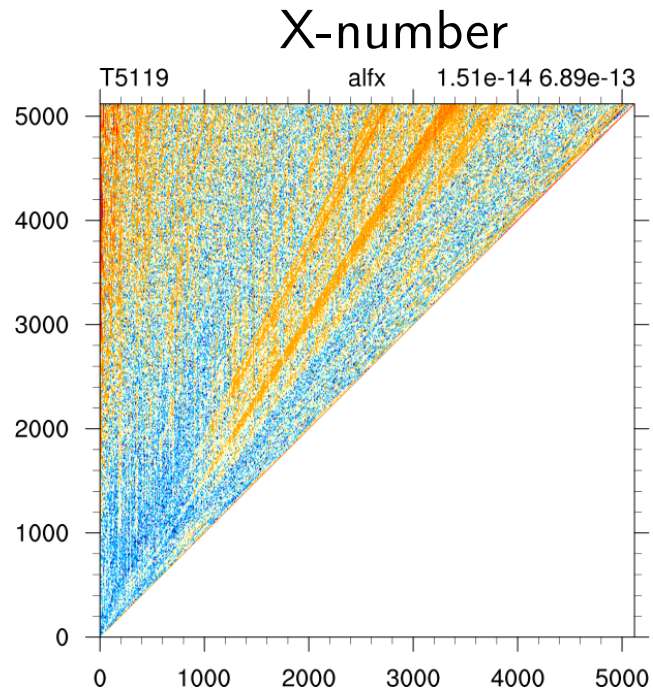
- 拡張浮動小数点数法とフーリエ法を T39 から T10239 まで比較。
- $\theta_j$  は  $P_J$  を  $\theta$  の函数と見て, 0 点を Newton 法とフーリエ法で計算。
- ガウス緯度は

$$w(\theta) = \frac{2J + 1}{\left[ d\tilde{P}_J(\cos \theta)/d\theta + \tilde{P}_J(\cos \theta) \cos \theta / \sin \theta \right]^2} \quad (18)$$

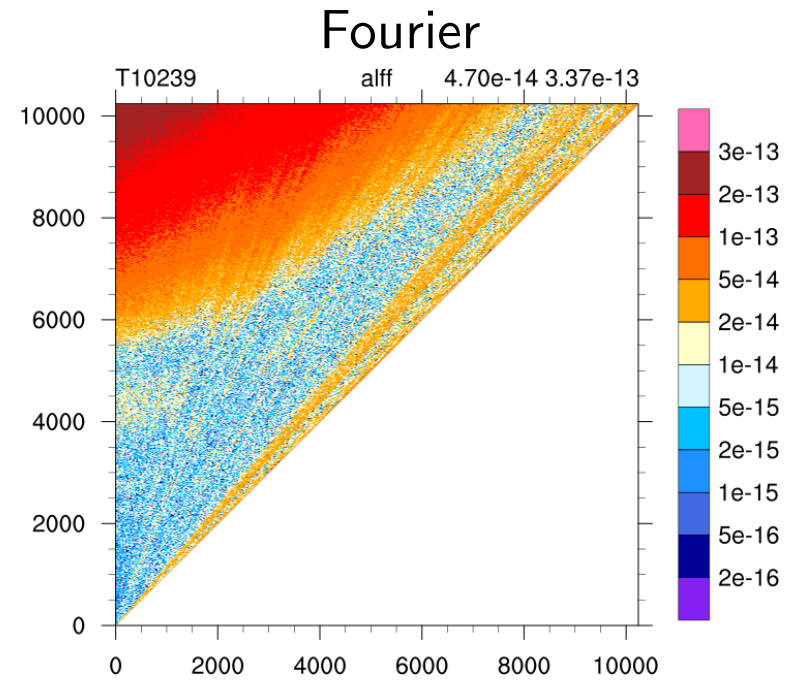
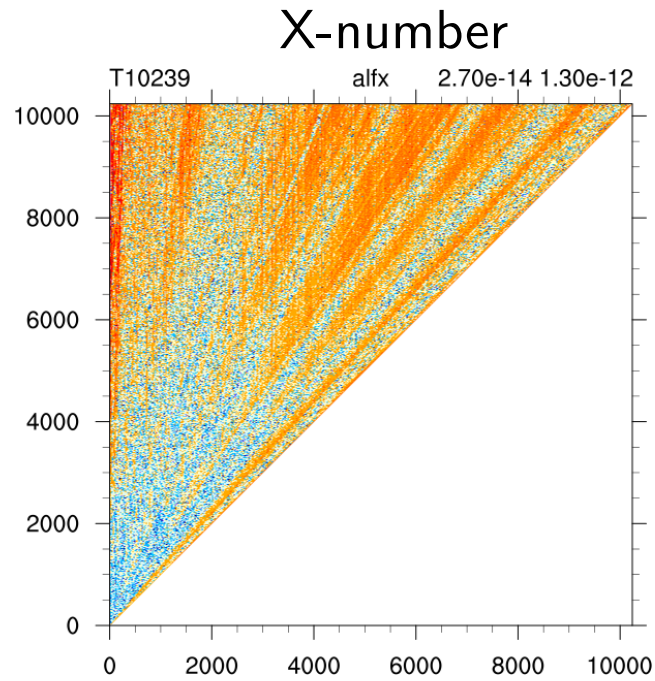
で計算し,  $\sum_{j=0}^{J/2} w_j = 1$  となるように係数をかける (Yakimiw 1996; Swarztrauber 2002)。



# T5119



# T10239



## 倍率因子

$\cos n\theta$  の係数

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}}. \quad (19)$$

Swarztrauber (2002) は  $a_{n,n}$  を次の式から計算

$$a_{n,n} = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}} a_{n-1,n-1}. \quad (20)$$

$$a_{1,1} = \sqrt{3/2} \quad (1 \text{ に正規化})$$

しかし, 式(20)の  $1/4n^2$  は,  $n$  に伴って機械  $\epsilon = 2.2204 \times 10^{-16}$  (倍精度) に漸近し, 1 に対して極めて小さくなる。

## 倍率因子の別の表し方

誤差を避けるには式(20)を次のように表せば良い。

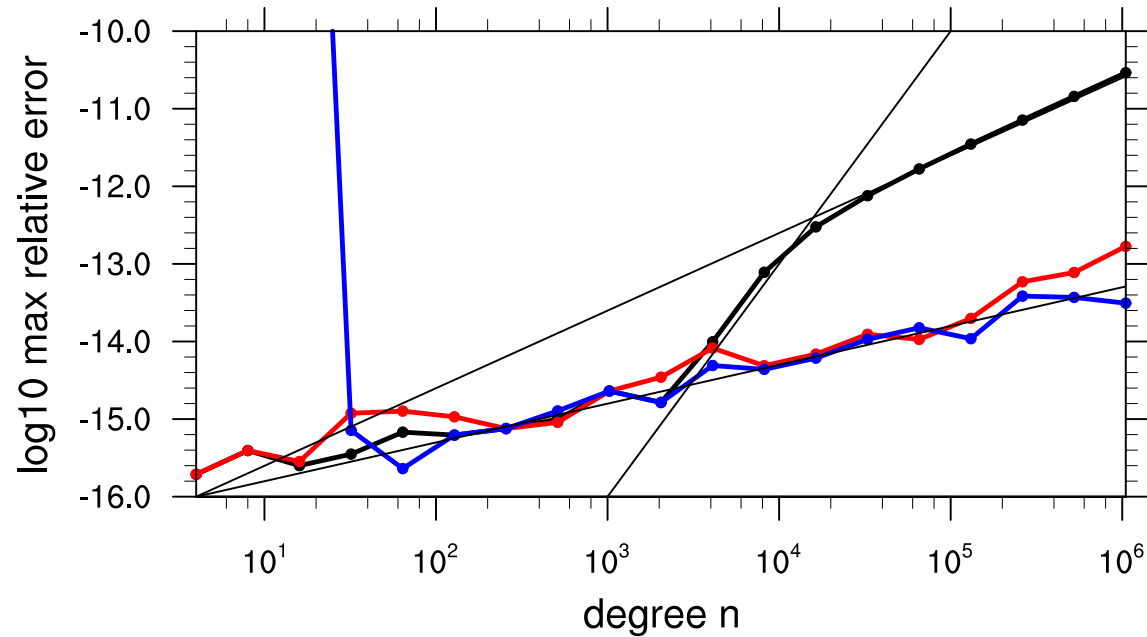
$$a_{n,n} = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n} a_{n-1,n-1}. \quad (21)$$

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1} \Gamma^2(n+1)}. \quad (22)$$

ここで  $\Gamma(n+1) \equiv n!$  はガンマ函数 (Swarztrauber 2002).

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left( 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} \right. \\ \left. + \frac{163879}{209018880n^5} + \frac{5246819}{75246796800n^6} - \frac{534703531}{902961561600n^7} + \dots \right). \quad (23)$$

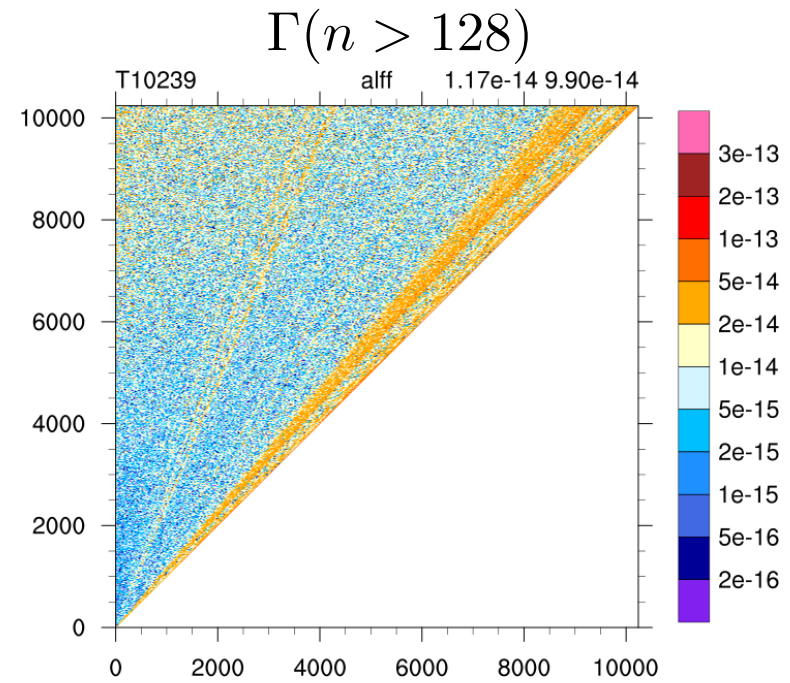
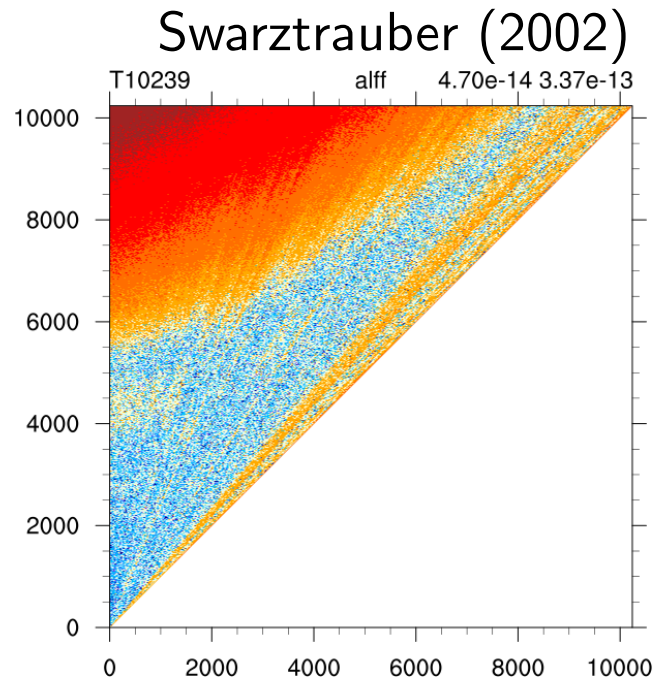
## フーリエ係数の最大相対誤差



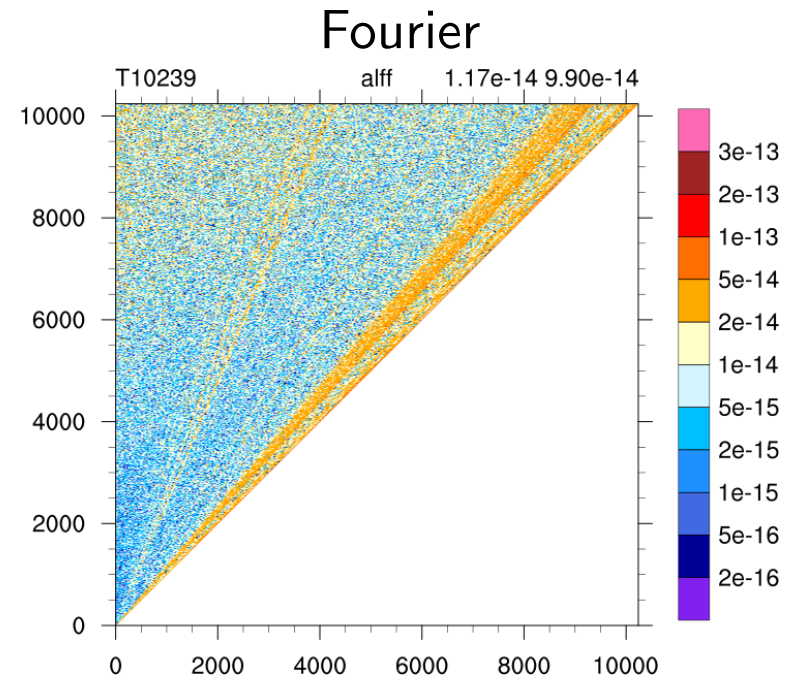
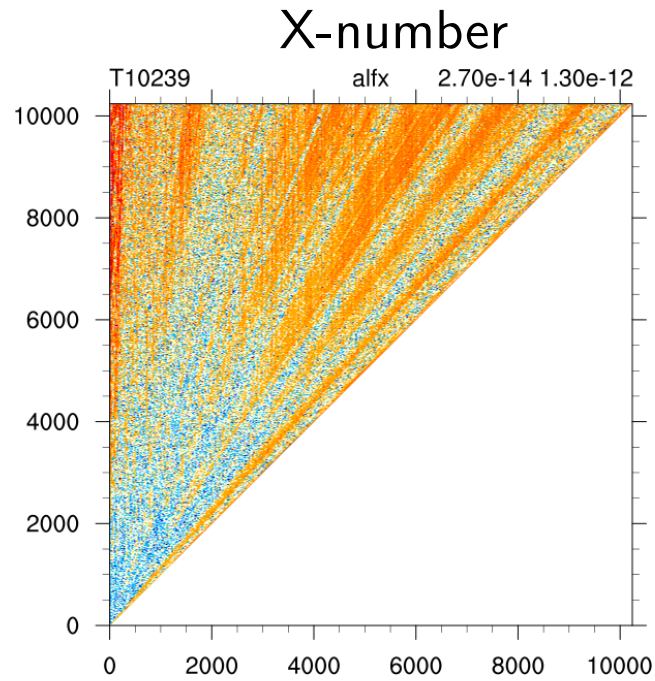
黒: Swarztrauber (2002), 赤: 式 (21), 青:  $\Gamma$  函数  
 $\epsilon(x_i)$  を 4 倍精度に対する誤差すると最大相対誤差は  

$$\text{mr}(x_i) = \max_i |\epsilon(x_i)| / |x_i|,$$

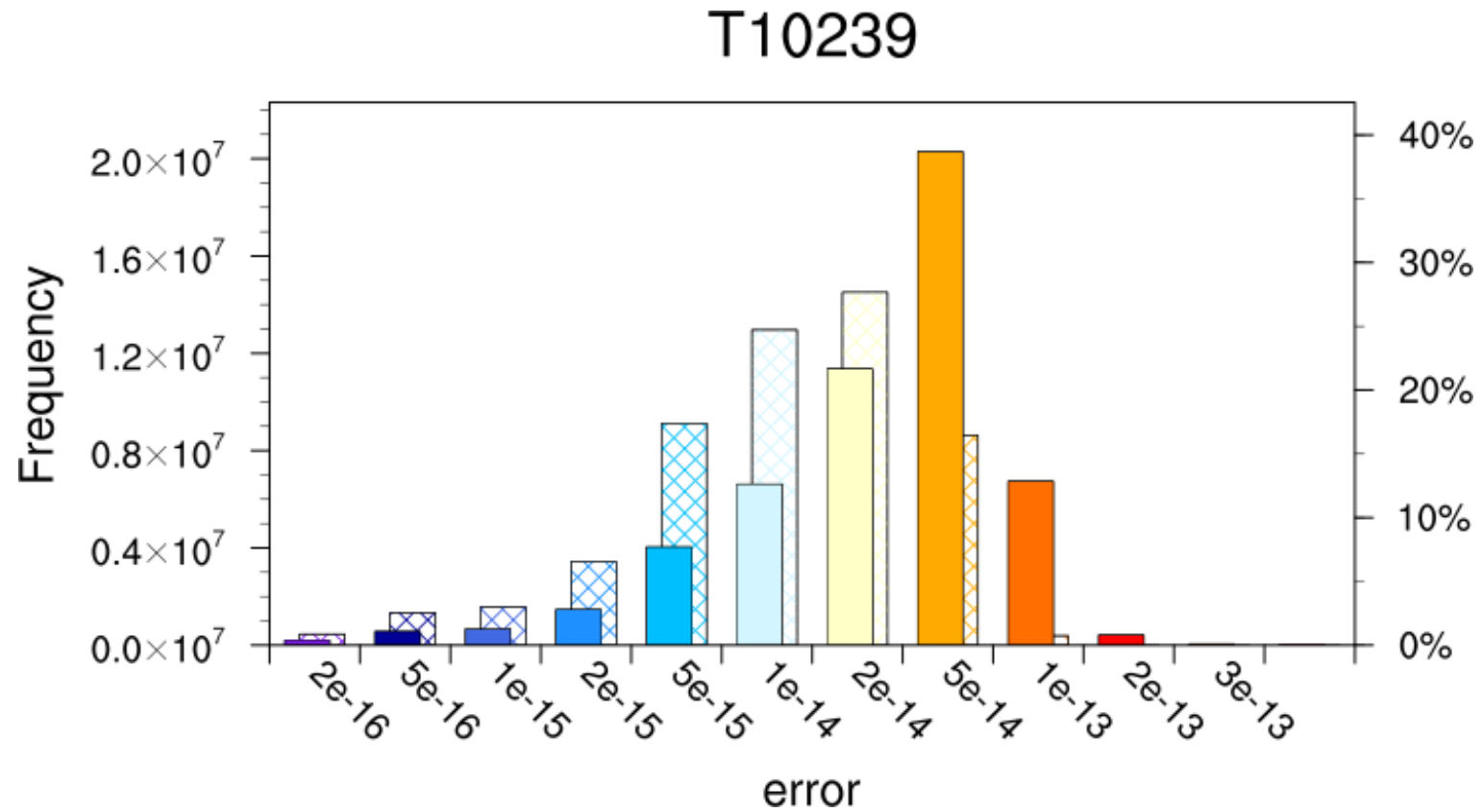
# T10239



# T10239



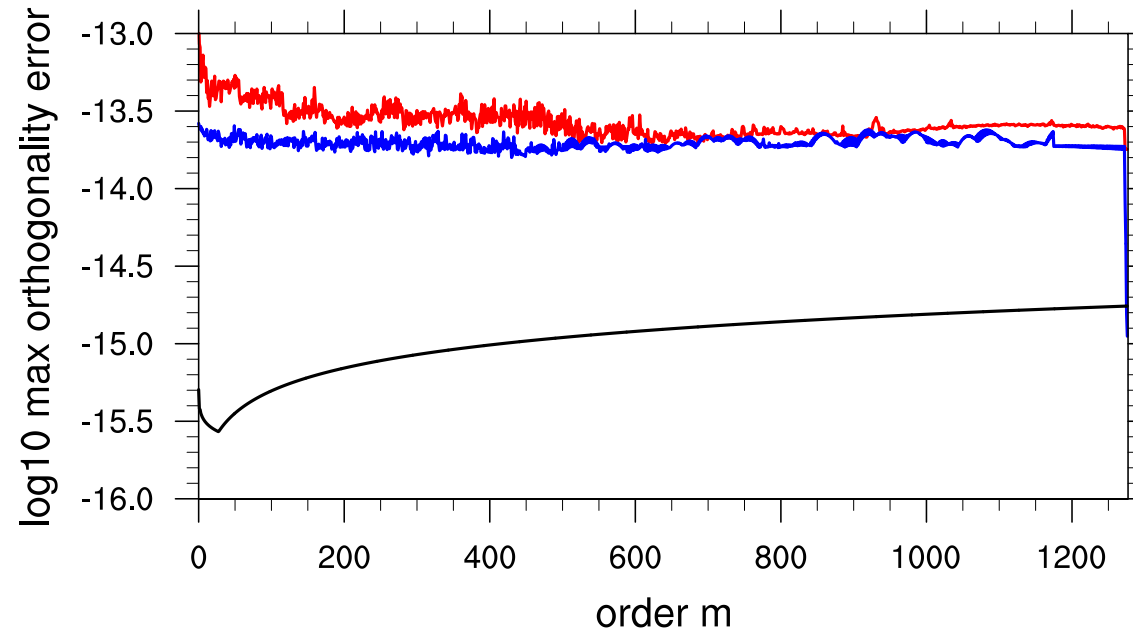
# 誤差のヒストグラム





## 直交性

T1279



T2559  $n = 2500$ ,  $m = 1200$ :  $e_o = 3.22 \times 10^{-14}$  (X-number),  
 $1.81 \times 10^{-14}$  (フーリエ法),  $1.51 \times 10^{-16}$  (4倍精度)

$$e_o = \left| \sum_{j=1}^{J/2} w(\theta_j) \tilde{P}_n^m(\cos \theta_j) \tilde{P}_{n'}^m(\cos \theta_j) \left[ 1 + (-1)^{n+n'} \right] \right|$$

## 相対誤差 ( relative precision )

$$e_{\text{rp}} = \frac{\delta A}{A_r} \quad (24)$$

ここで

$$\delta A \equiv \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^n \left| \tilde{P}_n^m(\cos \theta) - \hat{P}_n^m(\cos \theta) \right| \quad (25)$$

$$A_r \equiv \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^n \left| \hat{P}_n^m(\cos \theta) \right| \quad (26)$$

$\hat{P}_n^m(\cos \theta)$  は4倍精度の拡張浮動小数点数法で計算

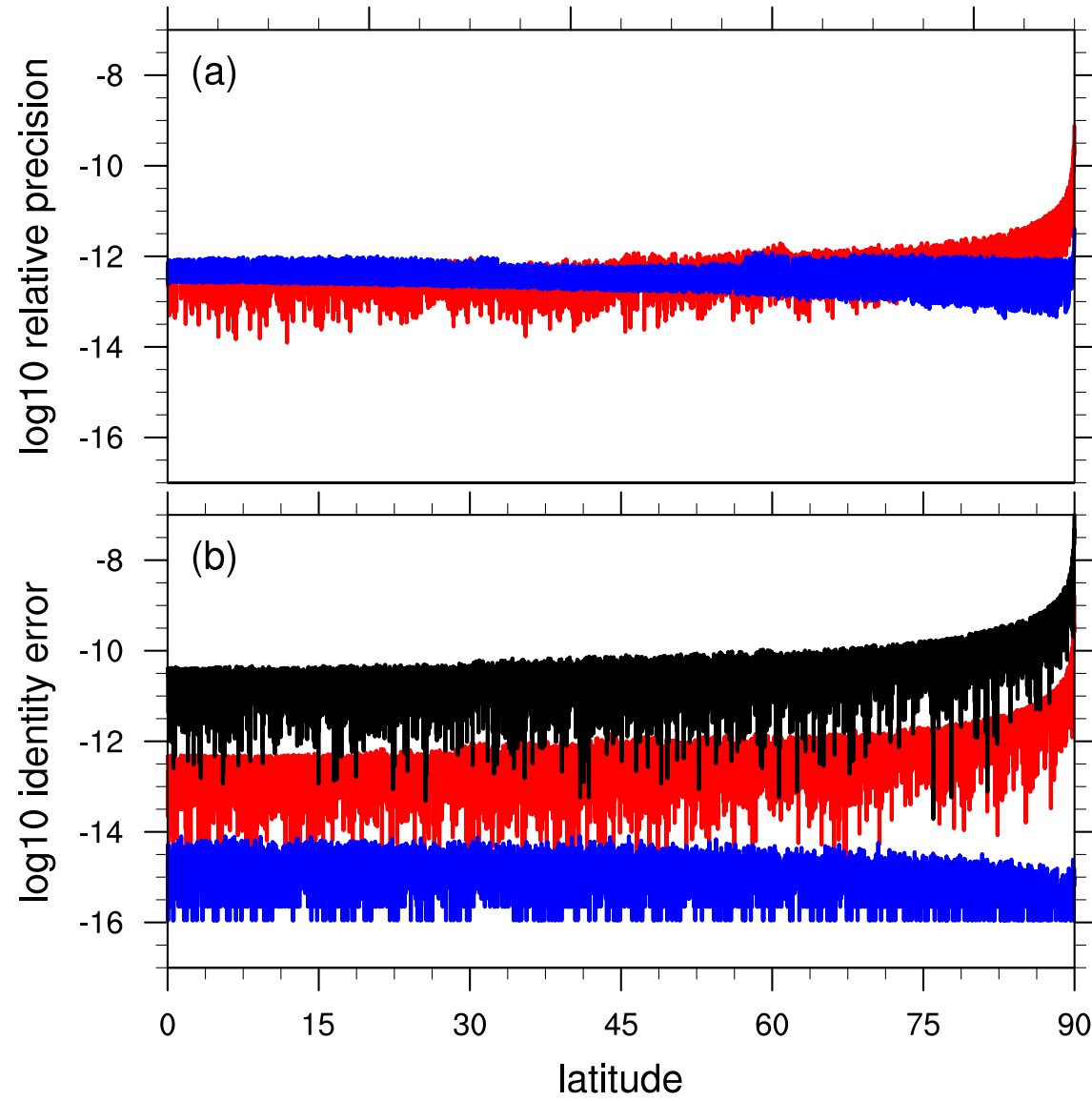
## 恒等式

$$e_{\text{id}} = \left| \frac{I - (M + 1)^2}{(M + 1)^2} \right| \quad (27)$$

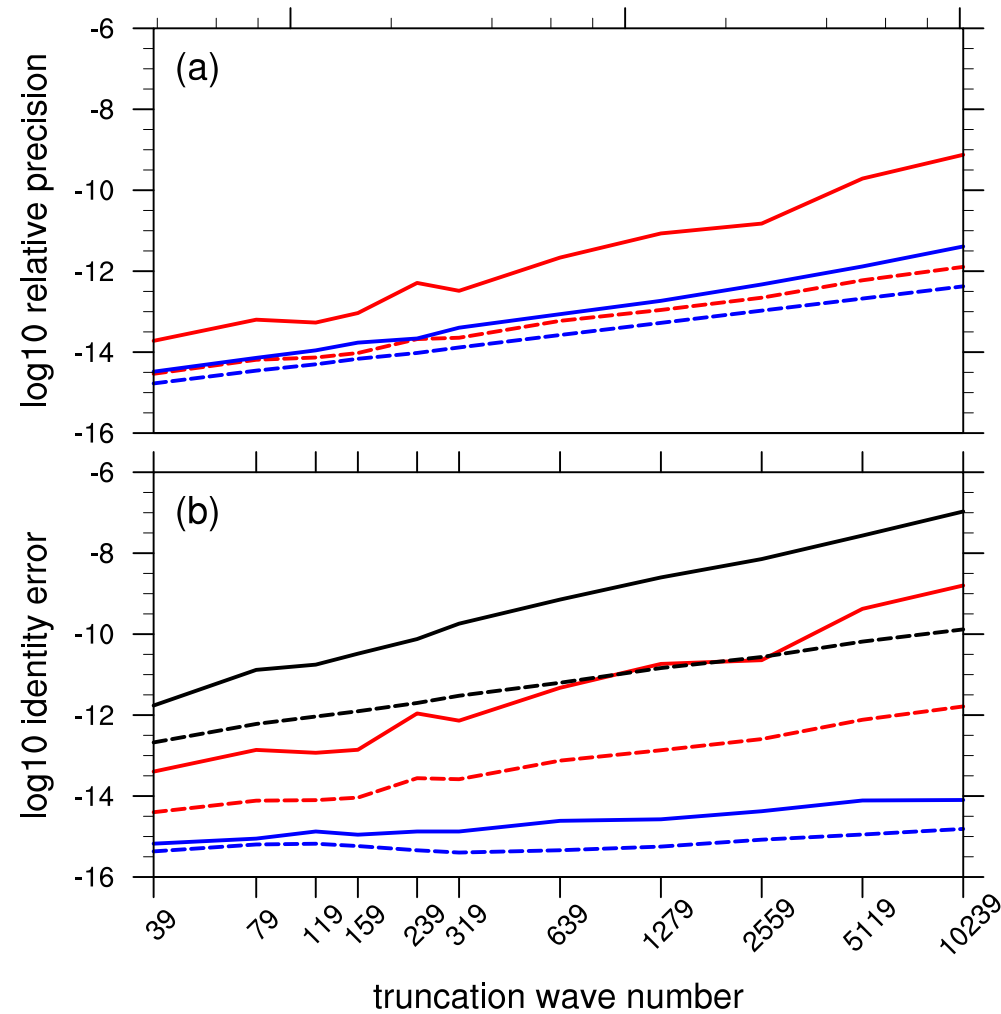
ここで

$$I = \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^n \left[ \bar{P}_n^m(\cos \theta) \right]^2 = (M + 1)^2 \quad (28)$$

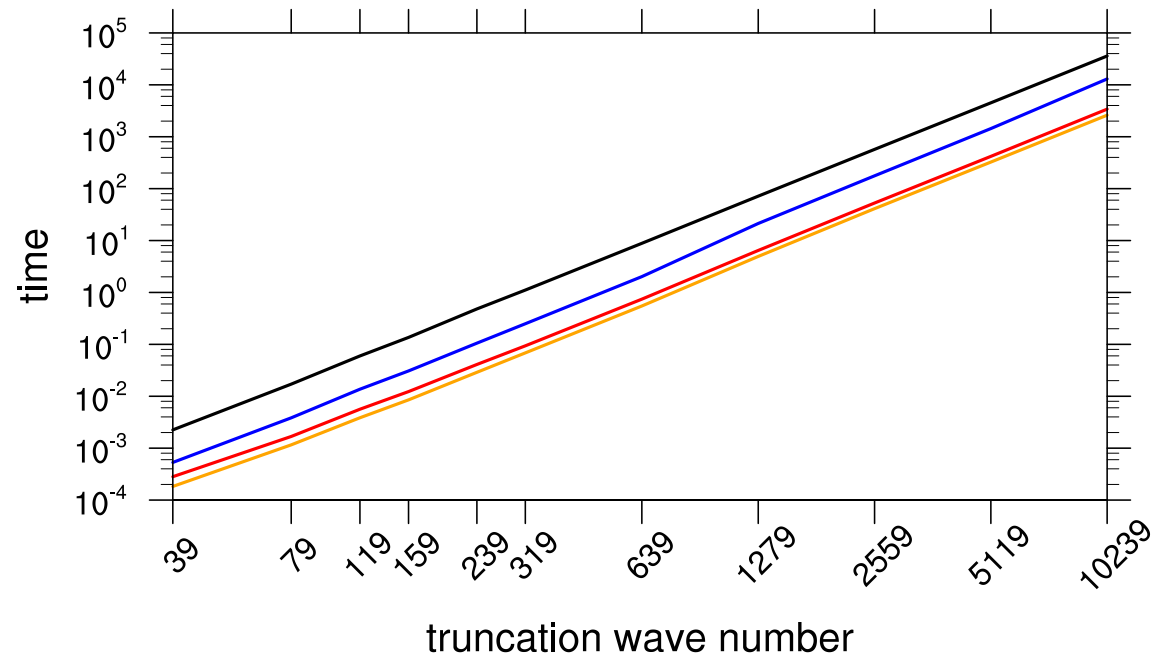
完全正規化されたルジャンドル陪函数  $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$  は  $m = 0$  で2に,  $m > 0$  で4に正規化 (Holmes and Featherstone 2002)



### $e_{rp}$ and $e_{id}$ の解像度依存性



# CPU時間の解像度依存性



逐次 Mac Pro 2013 3.5 GHz 6コア Intel Xeon E5, 32 GB メモリ

## まとめ

- 3点漸化式は切断波数が1700程度でアンダーフローのため破綻。
- 拡張浮動小数点数や4点漸化式でアンダーフローを回避可。
- 4点漸化式は $n > 2048$ で誤差が増大する。
- 誤差の原因となる倍率因子の式を書き換えることにより、誤差は $O(\sqrt{n})$ の増大に抑制できる。
- 4点漸化式は拡張浮動小数点数よりも精度の点で有利。
- 計算コストや並列化は拡張浮動小数点数のほうが有利。





## 参考文献

- Belousov, S. L., 1962: *Tables of normalized associated Legendre polynomials*. Pergamon Press, New York.
- Enomoto, T., A. Kuwano-Yoshida, N. Komori, and W. Ohfuchi, 2008: Description of AFES 2: Improvements for high-resolution and coupled simulations. *High Resolution Numerical Modelling of the Atmosphere and Ocean*, K. Hamilton and W. Ohfuchi, Eds., Springer New York, chap. 5, 77–97.
- Fukushima, T., 2011: Numerical computation of spherical harmonics by extending exponent of floating point numbers. *J. Geodesy*, **86**, 271–285.
- Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Holmes, S. A. and W. E. Featherstone, 2002: A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated legendre functions. *J. Geodesy*, **76**, 279–299.
- Nehrkorn, T., 1990: On the computation of Legendre functions in spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2248–2251.

- Ohfuchi, W., et al., 2004: 10-km mesh meso-scale resolving simulations of the global atmosphere on the Earth Simulator—preliminary outcomes of AFES (AGCM for the Earth Simulator)—. *J. Earth Simulator*, **1**, 8–34.
- Smith, J. M., F. W. Oliver, and D. W. Lozier, 1981: Extended-range arithmetic and normalized Legendre polynomials. *J. ACM. Trans. Math. Software*, **7**, 93–105.
- Swarztrauber, P. N., 1993: The vector harmonic transform method for solving partial differential equations in spherical geometry. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 3415–3437.
- Swarztrauber, P. N., 2002: On computing the points and weights for gauss–legendre quadrature. *SIAM J. Sci. Comput.*, **24**, 945–954.
- Yakimiw, E., 1996: Accurate computation of weights in classical Gauss-Cristoffel quadrature rules. *J. Comp. Phys.*, **192**, 406–430.
- Wedi, N. P., M. Hamrud, G. Mozdzynski, 2013: A fast spherical harmonics transform for global NWP and climate models. *Mon. Wea. Rev.*, **141**, 3450–3461.