2 次元非弾性流体モデル deepconv-mars 第 2 部: 離散モデル解説

小高正嗣

2001 年 11 月 1 日

目 次

1 モデル離散化の概要

モデルの離散化の概要を以下に示す.

空間差分 基礎方程式は直交 Lorenz 型スタッガード格子上の有限差分によって離散化する. スカラー量 (温位, ダスト混合比, 乱流エネルギー) の移流と連続の式は 4 次中央差分で離散化する. 運動量の移流と圧力の空間微分, 乱流拡散項, ダストの重力沈降は 2 次中央差分で離散化する. 中央差分に伴う格子サイズの数値的ノイズを消去するために, 乱流エネルギーとダスト混合比に対してはラプラシアンの 3 乗に比例する人工粘性を, 運動量については速度の空間勾配の 2 乗に比例する人工粘性を加えている.

放射伝達方程式, 地面熱伝導方程式の離散化も 2 次中央差分で行う. CO_2 赤外放射フラックスを計算する際の鉛直積分は台形公式を用いて行う.

時間差分 運動方程式, 熱力学の式, 乱流エネルギーの式, ダスト移流の式中の移流項と浮力項については leap frog スキームを用いる, だたし数値解の安定性のため, 10 ステップに 1 回前進差分を用いる. 放射加熱項と乱流拡散項に対しては全ての時間で前進差分を用いる. ダストの放射伝達方程式は行列の反復計算で解く. 反復回数は 4 回とした. 地中の熱伝導方程式の時間差分は Crank-Nicolson 法を用いた.

以下の各節中において記号の下付き添字 i, j はそれぞれ水平および鉛直方向の格子点値, 上付き添字 n, N は時間方向の格子点値を表す. 大気中の鉛直格子点数は J とする. スカラー量と基本場量の空間格子点を整数値にとり, それから半格子ずれた点を半整数値で表す. 空間格子間隔は水平方向は Δx, 鉛直方向は Δz_j, 時間刻みは Δt と表す.

2 大気モデル

2.1 運動方程式

第 1 部に示した式 (1)~(3) は以下のように変形した後に離散化する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + \alpha, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \beta, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\hat{P} &\equiv c_p \Theta_0 \pi - \gamma, \\
\alpha &\equiv -u\frac{\partial u}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial z} - fv + D(u) - \frac{\partial \beta}{\partial x}, \\
\beta &\equiv -u\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial v}{\partial z} + fu + D(v), \\
\gamma &\equiv \int_0^z \left(-u\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial z} + g\frac{\theta}{\Theta_0} + D(w) \right) dz
\end{aligned}
$$

である. このように変形するのはモデル上下端において π の境界条件を時間変化させないようにするためである.

これらを以下のように離散化する. 移流項 D[UVW]ADV は保存型と移流型の混合型で計算する. 摩擦項 $[\mathrm{D[UVW]VIS}]^N_{i+\frac{1}{2},j}$, $[\mathrm{D[UVW]NLV}]^N_{i+\frac{1}{2},j}$ の時間積分は前進差分, その他の項の積分は leap frog スキームと前進差分の組み合わせを用いて行う. 圧力項 $\hat{P}$ の導出について第 2.3 節を参照.

$$
\begin{aligned}
u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} &= u^N_{i+\frac{1}{2},j} + dt\left\{ \frac{\hat{P}_{i+1,j} - \hat{P}_{i,j}}{\Delta x} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j} \right\}, && (1) \\
v^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} &= v^N_{i+\frac{1}{2},j} + dt\beta^n_{i+\frac{1}{2},j}, && (2) \\
w^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} &= w^N_{i,j+\frac{1}{2}} + dt\frac{\hat{P}_{i,j+1} - \hat{P}_{i,j}}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}}. && (3)
\end{aligned}
$$

$$
N = \begin{cases} n-1 & \text{for leap frog,} \\ n & \text{for forward,} \end{cases} \qquad dt = \begin{cases} 2\Delta t & \text{for leap frog,} \\ \Delta t & \text{for forward.} \end{cases} \qquad (4)
$$

$$
\alpha_{i+\frac{1}{2},j} = -(\gamma_{i+1,j} - \gamma_{i,j}) + [\mathrm{DUADV}]^n_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DUPRS}]^n_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DUCOLI}]^n_{i+\frac{1}{2},j}
$$

$$
\begin{aligned}
& +[\mathrm{DUVIS}]^{N}_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DUNLV}]^{N}_{i+\frac{1}{2},j}, & (5)\\
\beta^{n}_{i+\frac{1}{2},j} &= [\mathrm{DVADV}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DVCOLI}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DVVIS}]^{N}_{i+\frac{1}{2},j} + [\mathrm{DVNLV}]^{N}_{i+\frac{1}{2},j}, & (6)\\
\gamma_{i,j} &= \sum_{j'=0}^{j} \Big([\mathrm{DWADV}]^{n}_{i,j'-\frac{1}{2}} + [\mathrm{DWVIS}]^{N}_{i,j'-\frac{1}{2}} + [\mathrm{DWNLV}]^{N}_{i,j'-\frac{1}{2}} \\
& \quad +[\mathrm{BUOY}]^{n}_{i,j'-\frac{1}{2}} \Big) \Delta z_{j'-\frac{1}{2}} & (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DUADV}^{n}_{i+\frac{1}{2},j} &= -\frac{1}{\Delta x} \Big\{ \Big(u^{n}_{i+1,j} u^{n}_{i+1,j} - u^{n}_{i-1,j} u^{n}_{i-1,j} \Big) \\
& + \Big(\rho_{0,j+\frac{1}{2}} u^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} w^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}} u^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} w^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big) \Delta x \Big/ (\rho_{0,j} \Delta z_j) \\
& - u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \left(\nabla\cdot \rho_0 \boldsymbol{v} / \rho_0 \right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big\}, & (8)\\
\mathrm{DVADV}^{n}_{i+\frac{1}{2},j} &= - \Big\{ \Big(v^{n}_{i+1,j} u^{n}_{i+1,j} - v^{n}_{i-1,j} u^{n}_{i-1,j} \Big) \\
& + \Big(\rho_{0,j+\frac{1}{2}} v^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} w^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}} v^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} w^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big) \Delta x \Big/ (\rho_{0,j} \Delta z_j) \\
& - v^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \left(\nabla\cdot \rho_0 \boldsymbol{v} / \rho_0 \right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big\} \Big/ \Delta x, & (9)\\
\mathrm{DWADV}^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{\Delta x} \Big\{ \Big(w^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - w^{n}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u^{n}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big) \\
& + \Big(\rho_{0,j+1} w^{n}_{i,j+1} w^{n}_{i,j+1} - \rho_{0,j} w^{n}_{i,j} w^{n}_{i,j} \Big) \Delta x \Big/ (\rho_{0,j+\frac{1}{2}} \Delta z_{j+\frac{1}{2}}) \\
& - w^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\nabla\cdot \rho_0 \boldsymbol{v} / \rho_{0,j} \right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \Big\}, & (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DUVIS}^{n}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \Big\{ \Big[K^{n}_{i+1,j} \Big(u^{n}_{i+\frac{3}{2},j} - u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big) - K^{n}_{i,j} \Big(u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - u^{n}_{i-\frac{1}{2},j} \Big) \Big] \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{\rho_{0,j} \Delta z_j} \Big[\rho_{0,j+\frac{1}{2}} K^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big(u^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big) \Big/ \Delta z_{j+\frac{1}{2}} - \\
& \rho_{0,j-\frac{1}{2}} K^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big(u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - u^{n}_{i+\frac{1}{2},j-1} \Big) \Big/ \Delta z_{j-\frac{1}{2}} \Big] \Big\}, & (11)\\
\mathrm{DVVIS}^{n}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \Big\{ \Big[K^{n}_{i+1,j} \Big(v^{n}_{i+\frac{3}{2},j} - v^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big) - K^{n}_{i,j} \Big(v^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - v^{n}_{i-\frac{1}{2},j} \Big) \Big] \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{\rho_{0,j} \Delta z_j} \Big[\rho_{0,j+\frac{1}{2}} K^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big(v^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - v^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \Big) \Big/ \Delta z_{j+\frac{1}{2}} - \\
& \rho_{0,j-\frac{1}{2}} K^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Big(v^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - v^{n}_{i+\frac{1}{2},j-1} \Big) \Big/ \Delta z_{j-\frac{1}{2}} \Big] \Big\}, & (12)\\
\mathrm{DWVIS}^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \Big\{ \Big[K^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big(w^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - w^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \Big) - K^{n}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Big(w^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - w^{n}_{i-1,j+\frac{1}{2}} \Big) \Big] \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{\rho_{0,j} \Delta z_j} \Big[\rho_{0,j+1} K^{n}_{i,j+1} \Big(w^{n}_{i,j+1} - w^{n}_{i,j} \Big) \Big/ \Delta z_{j+1} - \\
& \rho_{0,j} K^{n}_{i,j} \Big(w^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - w^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \Big) \Big/ \Delta z_{j-1} \Big] \Big\}. & (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DUNLV}^n_{i+\frac{1}{2},j} &= \left\{\left[\left(u^n_{i+\frac{3}{2},j} - u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^3 - \left(u^n_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)^3\right] + 0.1\left[\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^3\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(u^n_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)^3\right]\right\} \Big/ (16.0\cdot 10^3\cdot\rho_{0,j}\Delta z_j/\Delta x), \qquad (14) \\
\mathrm{DVNLV}^n_{i+\frac{1}{2},j} &= \left\{\left[\left(v^n_{i+\frac{3}{2},j} - v^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^3 - \left(v^n_{i+\frac{1}{2},j} - v^n_{i-\frac{1}{2},j}\right)^3\right] + 0.1\left[\left(v^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - v^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)^3\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(v^n_{i+\frac{1}{2},j} - v^n_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)^3\right]\right\} \Big/ (16.0\cdot 10^3\cdot\rho_{0,j}\Delta z_j/\Delta x), \qquad (15) \\
\mathrm{DWNLV}^n_{i,j+\frac{1}{2}} &= \left\{\left[\left(w^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - w^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(w^n_{i,j+\frac{1}{2}} - w^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)^3\right]\right. \\
&\quad \left. +0.1\left[\left(w^n_{i,j++\frac{3}{2}} - w^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(w^n_{i,j+\frac{1}{2}} - w^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right)^3\right]\right\}\Big/ \\
&\quad (16.0\cdot 10^3\cdot\rho_{0,j+\frac{1}{2}}\Delta z_{j+\frac{1}{2}}/\Delta x), \qquad (16) \\
\mathrm{BUOY}^n_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{g}{\Theta_{0,j+\frac{1}{2}}}\theta^n_{i,j+\frac{1}{2}}, \qquad (17) \\
\mathrm{DUCOLI}^n_{i+\frac{1}{2},j} &= -fv^n_{i+\frac{1}{2},j}, \qquad (18) \\
\mathrm{DVCOLI}^n_{i+\frac{1}{2},j} &= +fu^n_{i+\frac{1}{2},j}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& u^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j+1} + u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right), \quad u^n_{i,j} = 0.5\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j} + u^n_{i-\frac{1}{2},j}\right), \\
& v^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(v^n_{i+\frac{1}{2},j+1} + v^k_{i+\frac{1}{2},j-1}\right), \quad v^n_{i,j} = 0.5\left(v^n_{i+\frac{1}{2},j} + v^n_{i-\frac{1}{2},j}\right), \\
& w^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(w^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} + w^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right), \quad w^n_{i,j} = 0.5\left(w^n_{i,j+\frac{1}{2}} + w^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right), \\
& \theta_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{16}\theta^n_{i,j+2} + \frac{9}{16}\theta^n_{i,j+1} + \frac{9}{16}\theta^n_{i,j-1} - \frac{1}{16}\theta^n_{i,j-2}\right), \\
& K^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25\left(K^n_{i+1,j+1} + K^n_{i+1,j} + K^n_{i,j+1} + K^n_{i,j}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\Theta_{0,j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(\Theta_{0,j+1} + \Theta_{0,j+1}\right), \quad \rho_{0,j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(\rho_{0,j+1} + \rho_{0,j+1}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\rho_0\boldsymbol{v}/\rho_0)^n_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\rho_{0,j+\frac{1}{2}}w^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}}w^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\rho_{0,j}\Delta z_j}, \\
(\nabla\cdot\rho_0\boldsymbol{v}/\rho_0)^n_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\rho_{0,j+1}w^n_{i,j+1} - \rho_{0,j}w^n_{i,j}}{\rho_{0,j+\frac{1}{2}}\Delta z_{j+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

2.2 熱力学の式

移流項 $[\mathrm{DTADV}]^n_{i,j}$, $[\mathrm{DTAD0}]^n_{i,j}$ は 4 次中央差分で空間離散化する. 摩擦項 $[\mathrm{DTDIF}]^N_{i,j}$, $[\mathrm{DTDI0}]^N_{i,j}$ と放射加熱項 $Q^N_{rad,i,j}$ と散逸加熱項 $Q^N_{dis,i,j}$ の時間積分は常に前進差分

を用いて行う. 放射加熱項の計算方法は第 5 節を参照.

$$\begin{aligned}\theta_{i,j}^{n+1} &= \theta_{i,j}^{N} + dt\left\{\frac{\Theta_{0,j}}{T_{0,j}}(Q_{rad,i,j}^{N} + Q_{dis,i,j}^{N})\right. \\ &\left. + [\mathrm{DTADV}]_{i,j}^{n} + [\mathrm{DTAD0}]_{i,j}^{n} + [\mathrm{DTDIF}]_{i,j}^{N} + [\mathrm{DTDI0}]_{i,j}^{N}\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$Q_{dis,i,j}^{N} = \frac{C_\epsilon}{lc_p}(\varepsilon_{i,j}^{N})^{\frac{3}{2}}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{DTADV}_{i,j}^{n} = -\left\{\frac{1}{\rho_{0,j}\Delta x}\left[-\frac{1}{24}F\theta_{x(i+\frac{3}{2},j)}^{n} + \frac{9}{8}F\theta_{x(i+\frac{1}{2},j)}^{n} - \frac{9}{8}F\theta_{x(i-\frac{1}{2},j)}^{n} + \frac{1}{24}F\theta_{x(i-\frac{3}{2},j)}^{n}\right]\right. \\ &\left.+ \frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j}\left[-\frac{1}{24}F\theta_{z(i,j+\frac{3}{2})}^{n} + \frac{9}{8}F\theta_{z(i,j+\frac{1}{2})}^{n} - \frac{9}{8}F\theta_{z(i,j-\frac{1}{2})}^{n} + \frac{1}{24}F\theta_{z(i,j-\frac{3}{2})}^{n}\right]\right\}, \\ &F\theta_{x(i+\frac{1}{2},j)}^{n} = \rho_{0,j}u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\left(-\frac{1}{16}\theta_{i+2,j}^{n} + \frac{9}{16}\theta_{i+1,j}^{n} + \frac{9}{16}\theta_{i,j}^{n} - \frac{1}{16}\theta_{i-1,j}^{n}\right), \\ &F\theta_{z(i,j+\frac{1}{2})}^{n} = \rho_{0,j+\frac{1}{2}}w_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\left(-\frac{1}{16}\theta_{i,j+2}^{n} + \frac{9}{16}\theta_{i,j+1}^{n} + \frac{9}{16}\theta_{i,j}^{n} - \frac{1}{16}\theta_{i,j-1}^{n}\right).\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{DTAD0}_{i,j}^{n} = -\left\{\frac{1}{\rho_{0,j}\Delta x}\Theta_{0,j}\left[-\frac{1}{24}F_{x(i+\frac{3}{2},j)}^{n} + \frac{9}{8}F_{x(i+\frac{1}{2},j)}^{n} - \frac{9}{8}F_{x(i-\frac{1}{2},j)}^{n} + \frac{1}{24}F_{x(i-\frac{3}{2},j)}^{n}\right]\right. \\ &\left.+ \frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j}\left[-\frac{1}{24}F\Theta_{0,z(j+\frac{3}{2})}^{n} + \frac{9}{8}F\Theta_{0,z(j+\frac{1}{2})}^{n} - \frac{9}{8}F\Theta_{0,z(j-\frac{1}{2})}^{n} + \frac{1}{24}F\Theta_{0,z(j-\frac{3}{2})}^{n}\right]\right\}, \\ &F_{x(i+\frac{1}{2},j)}^{n} = \rho_{0,j}u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}, \\ &F\Theta_{0,z(j+\frac{1}{2})}^{n} = \rho_{0,j+\frac{1}{2}}w_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\left(-\frac{1}{16}\Theta_{0,j+2} + \frac{9}{16}\Theta_{0,j+1} + \frac{9}{16}\Theta_{0,j} - \frac{1}{16}\Theta_{0,j-1}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DTDIF}_{i,j}^{n} &= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}^{n}(\theta_{i+1,j}^{n} - \theta_{i,j}^{n}) - \tilde{K}_{i-\frac{1}{2},j}^{n}(\theta_{i,j}^{n} - \theta_{i-1,j}^{n})\right] + \\ &\frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j}\left[\rho_{0,j+\frac{1}{2}}\tilde{K}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\frac{(\theta_{i,j+1}^{n} - \theta_{i,j}^{n})}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}}\tilde{K}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}\frac{(\theta_{i,j}^{n} - \theta_{i,j-1}^{n})}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}}\right]\end{aligned} \tag{24}$$

$$\mathrm{DTDI0}_{i,j}^{n} = \frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j}\left[\rho_{0,j+\frac{1}{2}}\tilde{K}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\frac{(\Theta_{0,j+1}^{n} - \Theta_{0,j}^{n})}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}}\tilde{K}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}\frac{(\Theta_{0,j}^{n} - \Theta_{0,j-1}^{n})}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}}\right], \tag{25}$$

$$\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} = 0.5(\tilde{K}_{i+1,j}^{n} + \tilde{K}_{i,j}^{n}), \quad \tilde{K}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} = 0.5(\tilde{K}_{i,j+1}^{n} + \tilde{K}_{i,j}^{n}).$$

2.3 圧力診断式

圧力の診断式 (??) を第 2.1 節で行った変形にあわせて以下のように変形する.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0\frac{\partial}{\partial z}\right) P = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\rho_0\boldsymbol{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\alpha,$$

これを dimension-reduction 法を用いて解く. 上の式を適当に離散化すると,

$$\boldsymbol{D_x P} + \boldsymbol{D_z P} = \boldsymbol{S} \tag{26}$$

と書くことができる. ただし $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{D_x}, \boldsymbol{D_z}, \boldsymbol{S}$ はそれぞれ,

$$\hat{P}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\alpha,$$

を離散化した行列である. 行列 $\boldsymbol{D_z}$ の固有値を λ_i, 固有ベクトルを $V_i(z)$ とし, 固有列ベクトルを並べた行列を $\boldsymbol{V}$, 対角成分が λ_i である行列を $\boldsymbol{\Lambda}$ とすると, $\boldsymbol{D_z V} = \boldsymbol{V\Lambda}$ となる. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H}$ と展開すると,

$$\boldsymbol{V D_x H} + \boldsymbol{V\Lambda H} = \boldsymbol{S}.$$

したがって,

$$\left(\boldsymbol{D_x} + \boldsymbol{\Lambda}\right)\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S}, \tag{27}$$

となる.

固有値を λ_i と固有ベクトルを $V_i(z)$ を求めるために必要な z 方向の係数行列 $\boldsymbol{D}_z$ は

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0\frac{\partial}{\partial z}\pi$$

を差分化して与える. 最初の微分は 2 次中央差分, 次の微分は 4 次中央差分で解く. これは連続の式は 4 次中央差分, 圧力の微分は 2 次中央差分であることによる. よって係数行列は 5 重対角行列になる. 係数行列の成分を A_{ij} とすると以下のようになる.

$$A_{i,i+2} = -\frac{1}{\rho_0\Delta z_i}\left(\frac{1}{24\Delta z_{i+\frac{3}{2}}}\frac{(\rho_{0,i+2}+\rho_{0,i+1})}{2}\right), \tag{28}$$

$$A_{i,i+1} = \frac{1}{\rho_0\Delta z_i}\left(\frac{1}{24\Delta z_{i+\frac{3}{2}}}\frac{(\rho_{0,i+2}+\rho_{0,i+1})}{2} + \frac{9}{8\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}\frac{(\rho_{0,i+1}+\rho_{0,i})}{2}\right), \tag{29}$$

$$A_{i,i} = -\frac{1}{\rho_0\Delta z_i}\left(\frac{9}{8\Delta z m_{i+\frac{1}{2}}}\frac{(\rho_{0,i+1}+\rho_{0,i})}{2} + \frac{9}{8\Delta z_{i-\frac{1}{2}}}\frac{(\rho_{0,i}+\rho_{0,i-1})}{2}\right), \tag{30}$$

$$A_{i+1,i} = \frac{1}{\rho_0\Delta z_i}\left(\frac{1}{24\Delta z_{i-\frac{3}{2}}}\frac{(\rho_{0,i-1}+\rho_{0,i-2})}{2} + \frac{9}{8\Delta z_{i-\frac{1}{2}}}\frac{(\rho_{0,i}+\rho_{0,i-1})}{2}\right), \tag{31}$$

$$A_{i+2,i} = -\frac{1}{\rho_0\Delta z_i}\left(\frac{1}{24\Delta z_{i-\frac{3}{2}}}\frac{(\rho_{0,i-1}+\rho_{0,i-2})}{2}\right). \tag{32}$$

境界条件は上下壁で $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ となるようにする.

x 方向についても適当な固有関数に展開して各モードに対する展開係数を求める. ここでは三角関数で展開する.

$$\boldsymbol{H} = \sum_{k=1}^{NX/2-1} [\boldsymbol{H}]_{k_x}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{NX/2-1} \left[\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S}\right]_{k_x}, \tag{34}$$

$$(\boldsymbol{D_x} + \boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{k_x=1}^{NX/2-1} [\boldsymbol{D_x} + \boldsymbol{\Lambda}]_{k_x} \tag{35}$$

$$[\boldsymbol{H}]_{k_x} = [\boldsymbol{D_x} + \boldsymbol{\Lambda}]_{k_x}^{-1} \left[\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S}\right]_{k_x} \tag{36}$$

2.4 基本場

温度分布 T_j を与え, 静水圧平衡の式と状態方程式を用いて $P_{0,j}$ と $\rho_{0,j}$ を計算する.

$$\ln P_{0,j} = \ln P_{00} - \sum_{j=1}^{j} \frac{g}{RT_{0,j}} \Delta z_j, \tag{37}$$

$$\rho_{0,j} = \frac{P_{0,j}}{RT_{0,j}}. \tag{38}$$

$P_{0,j}, \rho_{0,j}$ を求めた後 $\Pi_{0,j}, \Theta_{0,j}$ を計算する.

$$\Pi_{0,j} = \left(\frac{P_{0,j}}{P_0 0}\right)^{\kappa}, \tag{39}$$

$$\Theta_{0,j} = \frac{T_{0,j}}{\Pi_{0,j}}. \tag{40}$$

3 乱流モデル

3.1 乱流パラメタリゼーション

移流項 $[\mathrm{DKADV}]^n_{i,j}$ は熱力学の式の場合と同様に 4 次中央差分, その他の項は 2 次中央差分で離散化する. 摩擦項 $[\mathrm{DKDIF}]^N_{i,j}$, $[\mathrm{DKNLD}]^N_{i,j}$ の時間積分に対しては常に前進差分を用いる. $[\mathrm{DKADV}]^n_{i,j}$, $[\mathrm{DKDIF}]^N_{i,j}$ の表現はそれぞれ (22), (24) 式と同様なので, ここでは省略する.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{n+1}_{i,j} &= \varepsilon^N_{i,j} + dt\Big\{[\mathrm{DKADV}]^n_{i,j} + [\mathrm{DKDIF}]^N_{i,j} + [\mathrm{DKNLD}]^N_{i,j} \\ &\quad + [\mathrm{DKBP}]^n_{i,j} + [\mathrm{DKSP}]^n_{i,j} - \frac{C_\epsilon}{l}(\varepsilon^N_{i,j})^{\frac{3}{2}}\Big\} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DKNLD}^n_{i,j} &= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[K^n_{NLD,i+\frac{1}{2},j}(\varepsilon^n_{i+1,j} - \varepsilon^n_{i,j}) - K^n_{NLD,i-\frac{1}{2},j}(\varepsilon^n_{i,j} - \varepsilon^n_{i-1,j})\right] + \frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j} \\ &\quad \left[\rho_{0,j+\frac{1}{2}}K^n_{NLD,i,j+\frac{1}{2}}\frac{(\varepsilon^n_{i,j+1} - \varepsilon^n_{i,j})}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} - \rho_{0,j-\frac{1}{2}}K^n_{NLD,i,j-\frac{1}{2}}\frac{(\varepsilon^n_{i,j} - \varepsilon^n_{*i,j-1})}{\Delta z_{j-\frac{1}{2}}}\right], \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}K^n_{NLD,i+\frac{1}{2},j} &= \mathrm{MIN}\left[K_{NLD,max}, \quad 0.01\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\mathcal{L}(\varepsilon)^n_{i+1,j} + \mathcal{L}(\varepsilon)^n_{i,j}}{2}\right], \\ K^n_{NLD,i,j+\frac{1}{2}} &= \mathrm{MIN}\left[K_{NLD,max}, \quad 0.01\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\mathcal{L}(\varepsilon)^n_{i,j+1} + \mathcal{L}(\varepsilon)^n_{i,j}}{2}\right], \\ \mathcal{L}(\varepsilon)^n_{i,j} &= \left(3\left|\varepsilon^n_{i+1,j} + \varepsilon^n_{i-1,j} - 2\varepsilon^n_{i,j}\right| + \left|\varepsilon^n_{i,j+1} + \varepsilon^n_{i,j-1} - 2\varepsilon^n_{i,j}\right|\right)\Big/ 2000, \\ K_{NLD,max} &= 0.2\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{DKBP}^n_{i,j} = -\frac{g}{\Theta_{0,j}}K^n_{i,j}\frac{1}{\Delta z_j}\left[(\theta_{i,j+\frac{1}{2}} + \Theta_{0,j+\frac{1}{2}}) - (\theta_{i,j-\frac{1}{2}} + \Theta_{0,j-\frac{1}{2}})\right], \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DKSP}^n_{i,j} &= 2K^n_{i,j}\left[\left(\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{w^n_{i,j+\frac{1}{2}} - w^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z_j}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{2}{3}\varepsilon^n_{i,j}\left[\frac{u^n_{i,j+\frac{1}{2}} - u^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z_j} + \frac{w^n_{i+\frac{1}{2},j} - w^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}\right] \\ &\quad + K^n_{i,j}\left[\frac{u^n_{i,j+\frac{1}{2}} - u^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z_j} + \frac{w^n_{i+\frac{1}{2},j} - w^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}\right]^2 \end{aligned} \tag{44}$$

$$u^n_{i,j+\frac{1}{2}} = 0.5\left(u^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right), \quad w^n_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5\left(w^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + w^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right).$$

3.2 地表フラックスパラメタリゼーション

地表からの運動量と熱のフラックスは以下のように離散化して計算する.

$$
\begin{aligned}
F_{u,i} &= -\rho_0 C_{D,i} |u_{i,\frac{1}{2}}| u_{i,\frac{1}{2}}, & (45)\\
F_{\theta,i} &= \rho_0 C_{D,i} |u_{i,\frac{1}{2}}| (T_{sfc,i} - T_{i,1}). & (46)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
C_{D,i} = \begin{cases} C_{Dn}\left(1 - \frac{a\mathrm{Ri}_{B,i}}{1+c|\mathrm{Ri}_{B,i}|^{1/2}}\right) & for \quad \mathrm{Ri}_{B,i} < 0, \\ C_{Dn}\frac{1}{(1+b\mathrm{Ri}_{B,i})^2} & for \quad \mathrm{Ri}_{B,i} \ge 0, \end{cases} \tag{47}
$$

である. バルクリチャードソン数は以下のように評価する.

$$
\mathrm{Ri}_{B,i} \equiv \frac{g z_1 (\Theta_{sfc,i} - \Theta_{i,1})}{\overline{\Theta}_{0,1} u_{i,\frac{1}{2}}}. \tag{48}
$$

4 ダストの輸送モデル

移流項 $[\mathrm{DQADV}]^n_{i,j}$ は熱力学の式と同様に 4 次中央差分, 重力沈降項 $[\mathrm{DQFALL}]^N_{i,j}$ は 1 次の上流差分で空間離散化する. 摩擦項 $[\mathrm{DQDIF}]^N_{i,j}$, $[\mathrm{DQNLD}]^N_{i,j}$ と重力沈降項の時間積分に対しては常に前進差分を用いる. $[\mathrm{DQADV}]^n_{i,j}$, $[\mathrm{DQDIF}]^N_{i,j}$, $[\mathrm{DQNLD}]^N_{i,j}$ の表現はそれぞれ (22), (24), (42) 式と同様なので, ここでは省略する.

$$q^{n+1}_{i,j} = q^N_{i,j} + dt\left\{[\mathrm{DQADV}]^n_{i,j} + [\mathrm{DQDIF}]^N_{i,j} + [\mathrm{DQFALL}]^N_{i,j} + [\mathrm{DQNLD}]^N_{i,j}\right\} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{DQFALL}^n_{i,j} &= -\frac{1}{\rho_{0,j}\Delta z_j}\left\{FQf^n_{z(i,j+\frac{1}{2})} - FQf^n_{z(i,j-\frac{1}{2})}\right\}, \quad (50)\\
FQf^n_{z(i,j-\frac{1}{2})} &= -\frac{4\rho_d g r^2_{mod}}{18\eta}\left(1 + 2\frac{\lambda_r}{r_{mod}}\frac{p_r}{P_{0,j}}\right)\rho_{0,j} q^n_{i,j},
\end{aligned}$$

5　放射モデル

放射加熱項 $Q^n_{rad,i,j}$ を正味放射フラックスから計算する際には 2 次中央差分を用いる.

$$Q^n_{rad,i,j} = Q^n_{rad,IR,i,j} + Q^n_{rad,NIR,i,j} + Q^n_{rad,dust,SR,i,j} + Q^n_{rad,dust,IR,i,j}, \quad (51)$$

$$Q_{rad,*,i,j} = -\frac{g}{c_p}\frac{F_{*,net,i,j+\frac{1}{2}} - F_{*,net,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta P_{0,j}}, \quad (52)$$

$$F_{*,net,i,j+\frac{1}{2}} = F^{\uparrow}_{IR,i,j+\frac{1}{2}} - F^{\downarrow}_{IR,i,j+\frac{1}{2}}, \quad \Delta P_{0,j} = P_{0,j+\frac{1}{2}} - P_{0,j-\frac{1}{2}}.$$

以下, CO_2 およびダストの放射フラックス計算の具体的な表現を示す. 放射フラックスは鉛直方向の半整数格子点上で評価する. 下付き添字 m は波数方向の差分を表す. 時間方向の差分を示す上付き添字は省略してある.

5.1　CO_2 の放射

CO_2 の放射フラックスは以下のように離散化して計算する.

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}_{IR,i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_m \Delta\nu_m \left\{ \pi B_{\nu_i,T_{sfc,i}} \mathcal{T}_i(0, z_{j+\frac{1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j'=1}^{j} \pi B_{\nu_m,T_{i,j'}} \frac{\mathcal{T}_m(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}}) - \mathcal{T}_m(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'-\frac{1}{2}})}{\Delta z_{j'}} \right\}, \quad (53) \\ F^{\downarrow}_{IR,i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_m \Delta\nu_m \left\{ \sum_{j'=j}^{J} \pi B_{\nu_m,T_{i,j'}} \frac{\mathcal{T}_m(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{3}{2}}) - \mathcal{T}_m(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}})}{\Delta z_{j'}} \right\}, \quad (54) \\ B_{\nu_m,T_{i,j}} &= \frac{1.19 \times 10^{-8} \nu_m^3}{e^{1.4387\nu_i/T_{i,j}} - 1}, \quad (55) \\ T_{i,j} &= \Pi_{0,j}(\theta_{i,j} + \Theta_{0,j}) \quad (56) \end{aligned}$$

透過関数, 透過幅, 光路長は以下のように離散化する.

$$\mathcal{T}_m(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}}) = \exp(-W_{m,j,j'}/\Delta\nu_m), \quad W_{m,j,j'} = \frac{S_m u(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}})}{\sqrt{1 + S_m u^*(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}})/\alpha^*_m}},$$

$$u(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}}) = 1.67g|P_{0,j+\frac{1}{2}} - P_{0,j'+\frac{1}{2}}|, \quad \alpha^*_m = \alpha_m \frac{\overline{p}_{jj'}}{p_0},$$

$$P_{0,j+\frac{1}{2}} = 0.5(P_{0,j} + P_{0,j+1}), \quad \overline{p}_{jj'} = \sum_{l=j}^{j'-1} \frac{P_{0,l+1} \cdot 1.67g|P_{0,l+\frac{3}{2}} - P_{0,l+\frac{1}{2}}|}{u(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j'+\frac{1}{2}})},$$

CO_2 の近赤外放射フラックスは以下のように離散化して計算する.

$$F^{\downarrow}_{NIR,i,j+\frac{1}{2}} = \sum_m \Delta\nu_m \left\{ S_{\nu_m} \mathcal{T}_i(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{J+\frac{3}{2}}) \cos\zeta \right\}. \tag{57}$$

ここで光路長は以下のように計算される.

$$u(z_{j+\frac{1}{2}}, z_{J+\frac{3}{2}}) = \frac{1.67 g |P_{0,j+\frac{1}{2}} - P_{0,J+\frac{3}{2}}|}{\mathrm{MAX}(\cos\zeta, \epsilon)}.$$

ϵ は除算例外を防ぐための微小量である.

5.2 ダストの放射

ダストの太陽放射フラックスは以下のように離散化して計算する.

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} &= F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}} - \Delta\tau_{\nu_m,j} \left[\gamma_{1,\nu_m} \frac{F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_{2,\nu_m} \frac{F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} - \gamma_{3,\nu_m} \tilde{\omega}^*_{\nu_m} S_0 e^{-\tau^*_{\nu_m,j+\frac{1}{2}}/\mu_0} \right], \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}} &= F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + \Delta\tau_{\nu_m,j} \left[\gamma_{2,\nu_m} \frac{F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_{1,\nu_m} \frac{F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + F^{\downarrow}_{dif,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} + (1-\gamma_{3,\nu_m}) \tilde{\omega}^*_{\nu_m} S_0 e^{-\tau^*_{\nu_m,j+\frac{1}{2}}/\mu_0} \right], \end{aligned} \tag{59}$$

$$\Delta\tau_{\nu_m,j} = \frac{\overline{Q}_{e,\nu_m}}{r_{eff}} \frac{3\rho_{0,j} q_{i,j}}{4\pi\rho_s} \Delta z_j, \quad \tau_{\nu_m,j+\frac{1}{2}} = \sum_{j'=j+1}^{J+1} \Delta\tau_{\nu_m,j'}.$$

ここで $\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{dif,\nu_m} = (F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,\frac{1}{2}}, F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,\frac{3}{2}}, ..., F^{\uparrow}_{dif,\nu_m,i,J+\frac{1}{2}})^T$ のように表すと (58),(59) は形式的に以下のような行列表現にすることができる.

$$\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{dif,\nu_m} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{dif,\nu_m} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{dif,\nu_m} + \boldsymbol{R}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{dif,\nu_m} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{dif,\nu_m} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{dif,\nu_m} + \boldsymbol{S}. \tag{61}$$

これらの式を反復法で解く. 各係数行列の成分は以下のように表される (ただし $0 \le j \le J$).

$$A_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j}\gamma_{1,\nu_m} & k = j, j \ge 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j}\gamma_{1,\nu_m} & k = j-1, j \ge 1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$B_{jk} = \begin{cases} A & j=k=0 \\ \frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j}\gamma_{2,\nu_m} & k=j,j-1,j\geq 1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$C_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j+1}\gamma_{2,\nu_m} & k=j,j+1,j\leq J-1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$D_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j+1}\gamma_{1,\nu_m} & k=j,j\leq J-1 \\ 1-\frac{1}{2}\Delta\tau_{\nu_m,j+1}\gamma_{1,\nu_m} & k=j+1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$R_j = \begin{cases} AS_0 e^{-\tau^*_{\nu_m,\frac{1}{2}}/\mu_0} & j=0 \\ \Delta\tau_{\nu_m,j}\gamma_{3,\nu_m}\tilde{\omega}^*_{\nu_m}S_0 e^{-\tau^*_{\nu_m,j+\frac{1}{2}}/\mu_0} & j\geq 1 \end{cases}$$

$$S_j = \begin{cases} \Delta\tau_{\nu_m,j+1}(1-\gamma_{3,\nu_m})\tilde{\omega}^*_{\nu_m}S_0 e^{-\tau^*_{\nu_m,j+\frac{3}{2}}/\mu_0} & j\leq J-1 \\ 0 & j=J \end{cases}$$

ダストの赤外放射フラックスの離散化はダストの太陽放射フラックスの場合と同様に行う.

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} &= F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}} - \Delta\tau_{\nu_m,j}\left[\gamma_{1,\nu_m}\frac{F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}}+F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2}\right. \\ &\quad \left. -\gamma_{2,\nu_m}\frac{F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}}+F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} - 2\pi(1-\tilde{\omega}^*_{\nu_m})B_{\nu_m,T_{i,j}}\right], \qquad (62) \\ F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}} &= F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}} + \Delta\tau_{\nu_m,j}\left[\gamma_{2,\nu_m}\frac{F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}}+F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2}\right. \\ &\quad \left. -\gamma_{1,\nu_m}\frac{F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j+\frac{1}{2}}+F^{\downarrow}_{IR,\nu_m,i,j-\frac{1}{2}}}{2} + 2\pi(1-\tilde{\omega}^*_{\nu_m})B_{\nu_m,T_{i,j}}\right]. \qquad (63) \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{IR,\nu_m} = (F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,\frac{1}{2}}, F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,\frac{3}{2}}, ..., F^{\uparrow}_{IR,\nu_m,i,J+\frac{1}{2}})^T$ 等と表すと, (62), (63) も行列形式で表現することができる.

$$\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{IR,\nu_m} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{IR,\nu_m} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{IR,\nu_m} + \boldsymbol{R}', \qquad (64)$$

$$\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{IR,\nu_m} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^{\uparrow}_{IR,\nu_m} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}^{\downarrow}_{IR,\nu_m} + \boldsymbol{S}'. \qquad (65)$$

ここで

$$B'_{jk} = \begin{cases} 0 & j=k=1 \\ B_{jk} & \text{others} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
R'_j &= \left\{ \begin{array}{cl} \pi B_{\nu_m, T_{sfc,i}} & j = 0 \\ 2\pi \Delta\tau_{\nu_m,j}(1-\tilde{\omega}^*) B_{\nu_m, T_{i,j}} & j \geq 1 \end{array} \right. \\
S'_j &= \left\{ \begin{array}{cl} 2\pi \Delta\tau_{\nu_m,j}(1-\tilde{\omega}^*) B_{\nu_m, T_{i,j}} & j \leq J-1 \\ 0 & i = N \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

である.

6 地表面熱収支モデル

地中の温度変化を計算する熱伝導方程式の離散化は時間方向には Clank-Nicolson 法, 空間方向には中心差分を用いて行う. 温度と格子間隔を整数格子点, 熱フラックスを半整数格子点で評価する. 鉛直方向の格子点数は J' とし, 最下層から $j = 1, 2, ...J'$ とする. 最上層の温度 $T_{i,J'}$ が地表面温度 $T_{sfc,i}$ である.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} &= \frac{\kappa}{4\Delta z_j}\left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta z_{j+1} + \Delta z_j} - \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{T_{i,j+1}^{n} - T_{i,j+1}^{n}}{\Delta z_{j+1} + \Delta z_j} - \frac{T_{i,j}^{n} - T_{i,j-1}^{n}}{\Delta z_j + \Delta z_{j-1}}\right). \qquad (66)
\end{aligned}
$$

ここで $\kappa = k_g/\rho_g c_{p,g}$ である. 時刻 $(n+1)\Delta t$ の項を左辺に, 時刻 $n\Delta t$ の項を右辺にまとめると,

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\frac{T_{i,j-1}^{n+1}}{\overline{\Delta z}_i} + \left[4 + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_{i,j}}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\overline{\Delta z}_{j-\frac{1}{2}}}\right)\right] T_{i,j}^{n+1} - \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\frac{T_{i,j+1}^{n+1}}{\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}}} \\
= \; & +\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\frac{T_{i,j-1}^{n}}{\overline{\Delta z}_{j-\frac{1}{2}}} + \left[4 - \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\overline{\Delta z}_{j-\frac{1}{2}}}\right)\right] T_{i,j}^{n} + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\frac{T_{i,j+1}^{n+1}}{\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}}}. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

ここで $\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}} = (\Delta z_{j+1} + \Delta z_j)/2$ とした. $\boldsymbol{T}^n = (..., T_{i,j}^n, T_{i,j+1}^n, T_{i,j+2}^n, ...)^T$ とすると, 行列式の形で

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{T}^{n+1} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{T}^{n}, \qquad (68)
$$

と表すことができる. ここで $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
A_{jj} &= 4 + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\overline{\Delta z}_{j-\frac{1}{2}}}\right), A_{j,j+1} = -\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{\overline{\Delta z}_{i+\frac{1}{2}}}, A_{j,j-1} = -\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{\overline{\Delta z}_{i-\frac{1}{2}}}, \\
B_{jj} &= 4 - \frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_j}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\overline{\Delta z}_{i-\frac{1}{2}}}\right), B_{j,j+1} = +\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{\overline{\Delta z}_{i+\frac{1}{2}}}, B_{j,j-1} = +\frac{\kappa\Delta t}{\Delta z_i}\frac{1}{\overline{\Delta z}_{i-\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

を要素に持つ $J' \times J'$ 行列である.

上端での境界条件と下端で断熱境界条件を考慮すると, (68) は

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{T}^{n+1} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{T}^{n} + \boldsymbol{S} \qquad (69)
$$

となる. したがって

$$\boldsymbol{T}^{n+1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{T}^{n} + \boldsymbol{S}), \tag{70}$$

を解くことになる. ここで係数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の第 1 行および第 J' 行の対角要素は,

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 4 + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta z_1}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{\frac{3}{2}}}\right), B_{11} = 4 - \frac{\kappa \Delta t}{\Delta z_1}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{\frac{3}{2}}}\right), \\
A_{J'J'} &= 4 + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta z_{J'}}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{J'-\frac{1}{2}}}\right), B_{J'J'} = 4 - \frac{\kappa \Delta t}{\Delta z_{J'}}\left(\frac{1}{\overline{\Delta z}_{J'-\frac{1}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{S}$ は J' 行列ベクトルで,

$$S_j = \begin{cases} \frac{\Delta t}{\rho_g c_{p,g} \Delta z_{J'}}[-F_s(1-A) + F_{IR,net} + H], & j = J' \\ 0, & j \neq J' \end{cases}$$

と表される.

参考文献

Nakajima, K. 1994: Direct numerical experiments on the large-scale organizations of cumulus convection, Ph.D thesis, Department of Earth and Planetary Science, Graduate School of Science, University of Tokyo, Tokyo, Japan(in Japanese).

Nakajima K., and M. Odaka, 2000: deepconv, GFD Dennou Club, http://www.gfd-dennou.org/library/deepconv/

小高正嗣, 中島健介, 石渡正樹, 林祥介, 2001: 2 次元非弾性系を用いた火星大気放射対流の数値計算, ながれマルチメディア 2001, http://www.nagare.or.jp/mm/2001/odaka/